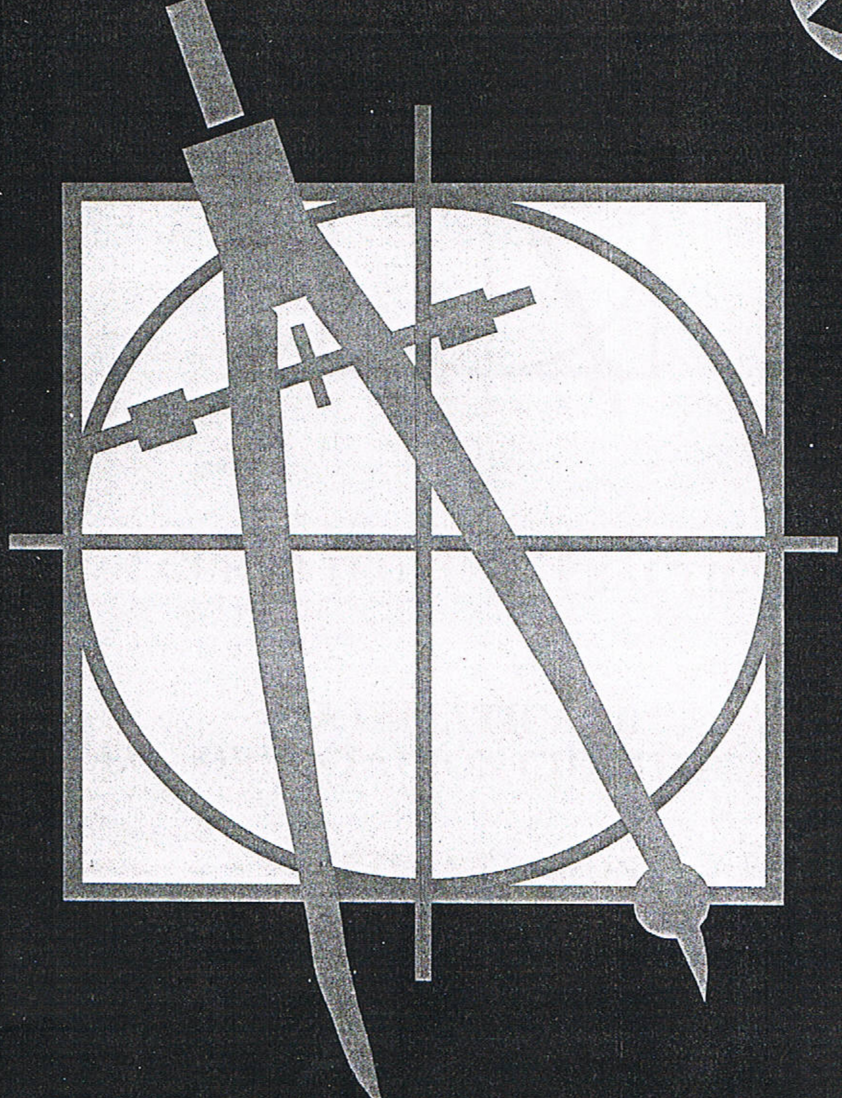
GEOMETRÍA MÉTRICA

PLANO Y ESPACIO

7ma EDICIÓN



Walter Fernández Val

TEXTO AUTORIZADO POR EL
CONSEJO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

KAPELUSZ - URUGUAY

PROLOGO

La intención con que se ha escrito este libro, es la de proporcionar un texto de referencia a los estudiantes de geometría métrica del segundo ciclo.

Ante la carencia de un texto que se adecue al programa, surge en consecuencia, el clásico " tomador de apuntes", lo que imposibilita al estudiante de una participación activa en la creación de la clase. Al existir un marco teórico- práctico de referencia, el estudiante podrá consultar, aún en forma previa, los temas tratados por el profesor, así como también, los temas que el profesor determine que no van a ser tratados en clase, estimulando de esta forma la capacidad del estudiante para resolver problemas, e interpretar desarrollos teóricos en forma independiente.

El desarrollo del curso esta sustentado en un sistema axiomático, con sus posteriores consecuencias demostradas en forma detallada, de modo que, el estudiante preuniversitario, perciba una estructura lógica en la construcción del modelo matemático, y de esta forma, incentivar un enfoque crítico de los fundamentos, y de la matemática en general, sin ahogar por ello, la intuición, la eficacia práctica y la creatividad.

El texto comienza con un capitulo 0 de revisión y profundización de conocimientos, que en general, el estudiante posee de cursos anteriores, y que incluye, una colección de definiciones y propiedades necesarias para la resolución de los problemas.

Este capítulo de carácter práctico, puede ser tratado en forma simultánea al capitulo 1, de introducción teórica al curso, el cual, no incluye ejercicios prácticos. El resto de los capítulos consta de un desarrollo teórico, con ejemplos de aplicación resueltos en su totalidad, así como ejercicios teóricos, y, al final de cada capítulo, una serie de ejercicios prácticos con soluciones, de modo que el alumno pueda verificar, si sus resultados son correctos.

<u>Agradecimientos</u>

Quiero mencionar mi reconocimiento y agradecimiento, a los profesores María Pucci, Paola Crespi y José Corradino, quienes, con instructivas observaciones, sugerencias y aportes, contribuyeron a eliminar errores y a mejorar el proyecto original; como así también, a Diana López por transcribir gran parte de este texto en la computadora. Todos los errores que hubieren en la exposición de los temas tratados, o resultados de los problemas, son responsabilidad exclusiva del autor .

<u>Dedicatoria</u>

Este libro esta dedicado a Pablo, Romina, Natalia, Diana, Luis y Nelly.

INDICE TEMATICO

- PROLOGO........3
- INDICE TEMATICO........5
- HERRAMIENTAS DEL SISTEMA........6
- NOTACION........8

GEOMETRIA DEL PLANO

Capítulo 0 . REVISION........10
Capítulo 1 . INCIDENCIAS, ORDEN Y MEDIDAS EN EL PLANO........40
Capítulo 2 . ISOMETRIAS EN EL PLANO........48
Capítulo 3 . SIMETRIA AXIAL........66
Capítulo 4 . SIMETRIA CENTRAL........72
Capítulo 5 . PARALELISMO Y TRASLACION........78
Capítulo 6 . ROTACION........87
Capítulo 7 . ANTITRASLACION........94
Capítulo 8 . COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE ISOMETRIAS..98
Capítulo 9 . LUGARES GEOMETRICOS FUNDAMENTALES........112
Capítulo 10 . TEOREMA DE THALES Y APLICACIONES........130
Capítulo 11 . HOMOTECIA........144
Capítulo 12 . SEMEJANZA........153

GEOMETRIA DEL ESPACIO

Capítulo 13. INCIDENCIAS Y ORDEN EN EL ESPACIO........176
Capítulo 14. PARALELISMO EN EL ESPACIO........195
Capítulo 15. PERPENDICULARIDAD........205
Capítulo 16 PROYECCIONES, DISTANCIAS Y ANGULOS........219
Capítulo 17. ISOMETRIAS EN EL ESPACIO........233

- SOLUCIONES........256
- INDICE GENERAL........274
- BIBLIOGRAFIA........284

HERRAMIENTAS DEL SISTEMA

Toda teoría matemática es un conjunto de proposiciones que se van construyendo a través de un esquema de deducción lógica. En la elaboración del modelo aquí expuesto, estarán presentes las siguientes herramientas matemáticas.

- **CONCEPTOS PRIMITIVOS**
  Son conceptos primarios, los cuales no son susceptibles de definición, por la imposibilidad de referirlos a otros más sencillos. Por ejemplo, son conceptos primitivos : elemento, conjunto, pertenecer, punto, recta, plano...

- **AXIOMAS**
  Son proposiciones que se admiten como válidas, sin demostración de ello, y sobre las cuáles se construye toda la teoría matemática. Las características que debe de cumplir un sistema de axiomas, para que sea satisfactorio han de ser:
  - **compatibilidad**, es decir que sus axiomas no pueden ser contradictorios entre sí, o en sus consecuencias
  - **completitud**, o sea que si se introduce un nuevo axioma, éste es innecesario, o inaceptable
  - **independencia**, vale decir que ninguno de sus axiomas puede demostrarse total o parcialmente como consecuencia de los demás

- **TEOREMAS**
  Luego de admitidos los conceptos primitivos y basándose en los axiomas, pueden deducirse lógicamente las propiedades o teoremas. Los teoremas constan de la siguiente estructura :
  - **Hipótesis**, son las premisas de las cuáles se parte y es lo que se supone se verifica.
  - **Tesis** ,es la conclusión , y es lo que se debe demostrar .
  - **Demostración** ,es la deducción lógica de la tesis a partir de la hipótesis.

  Veamos a continuación, los diferentes tipos de teoremas :
  - **Teoremas recíprocos**, la tesis de uno es la hipótesis del otro y viceversa.
  - **Teoremas contrarios** , la hipótesis y la tesis de uno de ellos, son las negaciones de la hipótesis y la tesis respectivamente del otro.
  - **Teoremas contrarrecíprocos**, cada uno de ellos es el recíproco del contrario del otro o viceversa, es decir que la hipótesis y la tesis de uno es respectivamente la negación de la tesis y la negación de la hipótesis del otro.

  Supongamos la existencia de un teorema que establezca que H implica T, quedan determinados los siguientes teoremas :
  - $H \rightarrow T$, **directo**
  - $T \rightarrow H$, **recíproco**
  - no H $\rightarrow$ no T , **contrario**
  - no T $\rightarrow$ no H , **contrarrecíproco**

El teorema directo expresa que la condición H es **suficiente** para que ocurra T.
El teorema recíproco expresa que la condición H es **necesaria** para que ocurra T.
La validez de un teorema no implica la validez del recíproco o del contrario, por ejemplo :
Todos los rectángulos son paralelogramos (directo),no implica que todos los paralelogramos sean rectángulos (recíproco).
Si se cumplen directo y recíproco, se dice que H es **condición necesaria y suficiente** para que se cumpla T. Veamos un ejemplo de esta afirmación :
Directo : todo punto del plano que equidiste de los extremos de un segmento pertenece a su mediatriz.
Recíproco : si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos
Si se afirma entonces que la condición necesaria y suficiente para que todo punto del plano equidiste de los extremos de un segmento, es que pertenezca a su mediatriz, deben probarse directo y recíproco.
El teorema directo y el contrarrecíproco son equivalentes , es decir que la validez de uno de ellos implica la del otro.

$$H \rightarrow T \quad \Leftrightarrow \quad \text{no } T \rightarrow \text{no } H$$

El método de razonamiento que consiste en probar la validez del directo mediante el contrarrecíproco, recibe el nombre de **reducción al absurdo**, y consiste en negar la tesis del directo para llegar a una contradicción con la hipótesis de éste, o con alguna proposición ya demostrada. A continuación se verá un ejemplo de este método.
Directo : toda recta a la cual no pertenece el centro de simetría (H), tiene por imagen una recta paralela no coincidente (T).
Contrarrecíproco : para su demostración se supone por absurdo que la recta y su imagen se cortan en un punto (no T) y se llega a la contradicción, de que la recta original contiene al centro de simetría (no H).

▫ DEFINICIONES

En la estructuración de la teoría, además de los conceptos primitivos, axiomas y teoremas, existen ciertos conceptos que pueden ser definidos como sigue :

- **Definiciones explícitas** , son clasificadoras, o sea que introducen palabras nuevas para designar combinaciones lógicas de conceptos ya definidos, por ejemplo rombo : cuadrilátero con cuatro lados iguales
- **Definiciones por abstracción** , son creadoras de nuevos conceptos. Toda relación de equivalencia entre los elementos de un conjunto los agrupa en clases cuyos elementos tienen una característica en común, por ejemplo el paralelismo entre las rectas del espacio, es una relación de equivalencia, que determina en este conjunto una partición en clases, llamadas direcciones, de modo que dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección.
  De esta manera por abstracción, se define el concepto de dirección.
- **Definiciones por recurrencia**, utilizan el principio de inducción completa, y sirven para introducir conceptos en que intervenga un número natural cualquiera, construyéndolo por inducción.

NOTACION

A,B,...P ....Puntos
(a), (b),.....,(r)....Rectas
$\overleftrightarrow{AB}$ ....Recta determinada por los puntos A y B
$\overrightarrow{Ox}$.................. Semirrecta de origen O
op.($\overrightarrow{Ox}$)...........Semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{Ox}$
$\overrightarrow{AB}$ ....Semirrecta de origen A que contiene a B
$\overline{AB}$ ....Segmento de extremos A y B
AB ....Distancia entre A y B, o longitud del segmento
$\vec{AB}$..................Vector
$\overset{\frown}{AB}$.................. Arco de extremos A y B
$A\hat{O}B$................Ángulo de vértice O y lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
$x\hat{O}y$..................Ángulo de vértice O y lados $\overrightarrow{Ox}$ y $\overrightarrow{Oy}$
$x\hat{\underline{O}}y$ ....Ángulo orientado de semirrecta inicial $\overrightarrow{Ox}$ y semirrecta final $\overrightarrow{Oy}$
$\overset{\triangle}{ABC}$ .... Triángulo
(r,P)..................Semiplano de borde (r) y que contiene a P
op.(α)...............Semiplano opuesto al semiplano α
mz ($\overline{AB}$)...........Mediatriz del segmento
bz ($x\hat{O}y$).......... Bisectriz del ángulo
d (P,r)...............Distancia entre el punto P y la recta (r)
d (P,α).............Distancia entre el punto P y el plano α
$\widehat{\alpha,\beta}$..................Diedro de caras α y β
$\mathscr{C}_{O,r}$................. Circunferencia de centro O y radio r
$\mathscr{C}_{\overline{AB}}$ ....Circunferencia de diámetro $\overline{AB}$
$\mathscr{A}_{\overline{AB},\alpha}$...............Arco capaz de segmento AB y ángulo $\hat{\alpha}$
S_e ....Simetría axial de eje (e)
C_O ....Simetría central de centro O
$T_{\vec{u}}$ ....Traslación de vector $\vec{u}$
$R_{O,\vec{\varphi}}$..................Rotación de centro O y ángulo $\vec{\varphi}$
AT $e,\vec{u}$ ....Antitraslación de eje (e) y vector $\vec{u}$
S_α.....................Simetría especular de plano α
$R_{e,\vec{\varphi}}$..................Rotación de eje (e) y ángulo $\vec{\varphi}$
$H_{O,k}$ ....Homotecia de centro O y razón k
RH $_{O,\vec{\varphi},k}$ .... Rotohomotecia de centro O, ángulo $\vec{\varphi}$ y razón k
Σ_k .... Semejanza de razón k

SIMBOLOS

$\rightarrow$....Se transforma
$\varnothing$ .....Conjunto vacío
$\parallel$ .....Paralelo
$\perp$ .....Perpendicular
$\underline{\perp}$ ....Ortogonal
$\prec$.....Precede
/........Tal que
$\cong$........Congruente
$\simeq$ ....Semejante
$\in$ ....Pertenece
$\notin$ ....No pertenece
$\subset$ ......Incluido
$\cup$ ....Unión
$\cap$ ....Intersección
$\forall$ ....Para todo
$\exists$.........Existe
$\Rightarrow$.......Implica
$\Leftrightarrow$ ....Si y sólo si

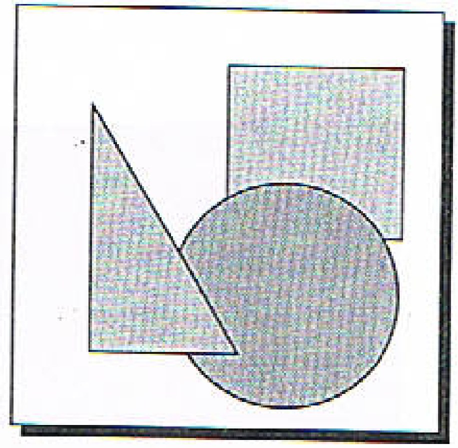
GEOMETRIA

DEL

PLANO

CAPITULO 0

REVISION

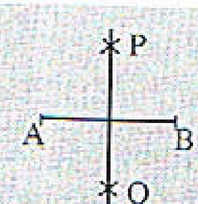
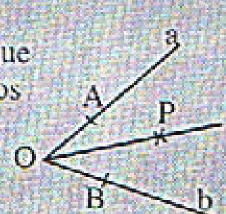


INTRODUCCION

Este capítulo de introducción al curso está compuesto por una serie de siete módulos, en los cuales se plantean ejercicios prácticos, a manera de revisión y profundización de conceptos de cursos anteriores. Al inicio de cada módulo, se encontrarán definiciones, propiedades y sugerencias, útiles para la resolución de los ejercicios propuestos, como así también, ejemplos resueltos de cada tema. En el posterior desarrollo del curso, se determinarán con precisión y se demostrarán en forma teórica muchas de las proposiciones enunciadas en este capítulo.

1.- CONSTRUCCIONES ELEMENTALES CON REGLA Y COMPAS

En este módulo se proponen una serie de ejercicios, en los que se pide la construcción de figuras, usando únicamente regla y compás. A continuación se dan algunas sugerencias útiles para la realización de este tipo de construcciones.

SI SE PIDE ...		SUGERENCIA ...
❖ Trazar la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ (perpendicular por el punto medio del segmento).		Con centros en A y B se trazan arcos de circunferencia, de igual radio, que se cortan en dos puntos P y Q. La recta PQ es la mediatriz del segmento.
❖ Trazar la bisectriz de ángulo $a\widehat{O}b$ (Semirrecta interior que divide al ángulo en dos ángulos iguales)		1) Con centro en O, se traza una circunferencia que corta a $\overline{Oa}$ en A y a $\overline{Ob}$ en B. 2) Con centros en A y B, se trazan dos arcos de circunferencia de igual radio, que se cortan, en un punto interior P. La semirrecta $\overline{OP}$ es la bisectriz

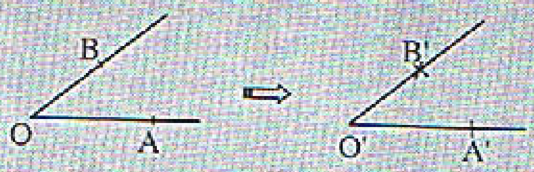
SI SE PIDE ...

SUGERENCIA ...

- Transportar un segmento $\overline{AB}$,sobre una semirrecta.

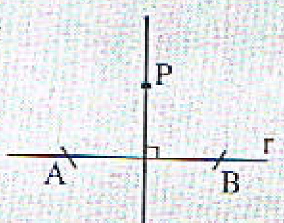
Efectuar el transporte, usando el compás.

- Transportar un ángulo $\widehat{AOB}$.



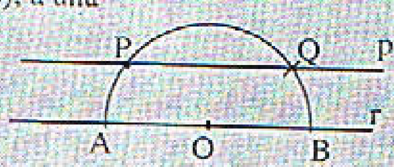
1) Se transporta el segmento $\overline{OA}$, resultando $\overline{O'A'}$
2) Con centro en O', trazar un arco de circunferencia de radio $\overline{OB}$
3) Con centro en A', trazar un arco de circunferencia de radio $\overline{AB}$
4) La intersección de los arcos determina el punto B' y el ángulo.

- Trazar la perpendicular a una recta (r), por un punto P.



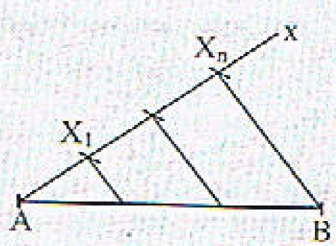
1) Con centro en P, y cualquier radio, trazar una circunferencia que corte a la recta (r) en dos puntos A y B.
2) Construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

- Por un punto P, trazar una paralela (p), a una recta dada (r).



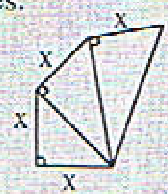
1) Con centro en un punto O, cualquiera de (r), trazar una semicircunferencia de radio $\overline{OP}$. Sea su diámetro $\overline{AB}$
2) Con centro en B y radio $\overline{AP}$, se se traza un arco que corta a la semicircunferencia en Q.
La recta PQ es la paralela (p).

- Dividir un segmento $\overline{AB}$, en partes iguales.



1) Trazar,una semirrecta $\overrightarrow{Ax}$ cualquiera
2) Sobre la semirrecta anterior , y a partir de A, con el compás se determinan n segmentos consecutivos e iguales de cualquier medida.
3) Se une el extremo final X_n con B
4) Se trazan paralelas a la recta BX_n, por los restantes puntos X_i .
Las intersecciones con el segmento $\overline{AB}$ determinan los puntos buscados.
(Aplicación de Thales)

SI SE PIDE ...	SUGERENCIA ...
❖ Dividir un ángulo, en dos ángulos iguales	Construir la bisectriz del ángulo.
❖ Construir segmentos de medidas irracionales.	Efectuar la construcción de sucesivos triángulos rectángulos, de modo que uno de los catetos del siguiente triángulo, coincida con la hipotenusa del anterior. En la construcción de la figura las respectivas hipotenusas medirán $\sqrt{2}.x, \sqrt{3}.x ... \sqrt{n}.x$ (Aplicación de Pitágoras)



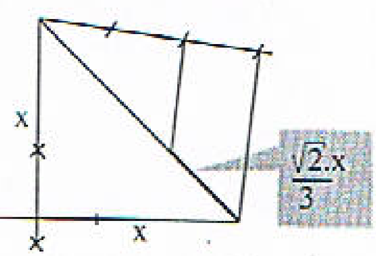
1.2 EJEMPLO

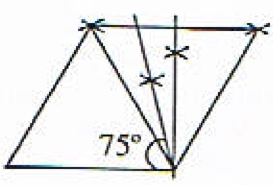
Dada una medida **x**, cualquiera, construir usando sólo regla y compás, un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$, tal que $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 75°$ y $\overline{AB} = (\sqrt{2}/3).x$

En primer lugar para hallar el segmento $\overline{AB}$ pedido se construye un triángulo rectángulo , cuyos catetos midan **x.** Aplicando Pitágoras se cumplirá que si **h** es la medida de la hipotenusa , entonces :

$h^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{2.x^2} \Rightarrow h = \sqrt{2}.x$.

Al segmento anterior se lo divide en tres, mediante paralelas.





❖ A continuación mediante la construcción de un triángulo equilátero, se divide uno de sus ángulos de 60°,mediante bisectrices, en 30° y 15°, y considerando otro consecutivo de 60°, se obtiene un ángulo de 75°.

❖ Por último se construye el triángulo $\widehat{ABC}$, construyendo un ángulo recto de vértice A, y transportando el segmento y el ángulo hallados anteriormente.

1.3 EJERCICIOS

1. Construir ángulos con las siguientes amplitudes : a) 90°, b) 22°30', c)30°, d) 67°30', e) 105°, f) 135°.

2. Dado un segmento de medida **x**, construir segmentos que midan :
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}x$, c) $\frac{\sqrt{5}}{4}x$.

3. Construir triángulos $\widehat{ABC}$, con el ángulo $\widehat{A} = 90°$, y que además cumplan las siguientes condiciones en cada caso : a) $\overline{AB} = 5cm$ y $\overline{BC} = 8$ cm, b) $\overline{AB} = 4$ cm y $\widehat{C} = 30°$, c) $\overline{BC} = 7$ cm y $\widehat{B} = 45°$.

4. Construir triángulos $\widehat{ABC}$, con $\overline{AB} = \overline{AC}$, y que además cumplan las siguientes condiciones, en cada caso : a) $\overline{BC} = 5cm$. y $\widehat{C} = 30°$ b) $\overline{AC} = 5cm$. y $\widehat{C} = 30°$, c) $\overline{AC} = 4cm$. y $\widehat{A} = 45°$.

5. Dado un segmento cualquiera de medida **x**, construir triángulos $\widehat{ABC}$, con las siguientes condiciones en cada caso :
a) $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3}x$, $\widehat{A} = 60°$, b) $\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\widehat{A} = 56°15'$, $\widehat{B} = 45°$.

6. a) En un triángulo $\widehat{ABC}$ cualquiera, construir las tres mediatrices, correspondientes a cada lado y verificar que se cortan en un mismo punto O (circuncentro).
   b) Trazar la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$, (circunferencia circunscrita), y verificar que B y C pertenecen a ella.

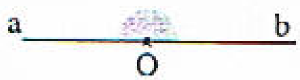
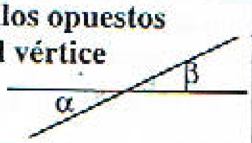
7. a) Trazar las tres bisectrices correspondientes a los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, y verificar que se cortan en un punto I, (incentro).
   b) Por I, trazar una recta perpendicular a uno de los lados y determinar el punto de corte T. Trazar la circunferencia de centro I, y radio $\overline{IT}$, (circunferencia inscrita) y verificar que ésta, es tangente a los tres lados .

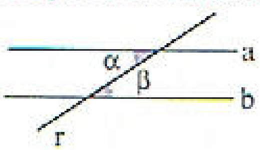
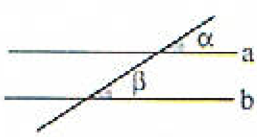
8. Dado un triángulo cualquiera $\widehat{ABC}$, trazar las tres rectas que contienen a las alturas (rectas que pasan por cada vértice, y perpendiculares al lado opuesto), y verificar que se cortan en un punto (ortocentro) .

9. a) Transportar el triángulo $\widehat{ABC}$ del ejercicio 6, incluidos los puntos medios de los lados, (puntos de corte de las mediatrices con los lados). Construir las tres medianas (segmentos determinados por cada punto medio y el vértice opuesto) y verificar que se cortan en un mismo punto G (baricentro).
   b) Transportar cualquier mediana, por ejemplo $\overline{AM}$, fuera del triángulo y dividir el segmento en tercios. Verificar que la medida de 2/3 de la mediana, es igual a la medida del segmento $\overline{AG}$.

2. ANGULOS

2.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES

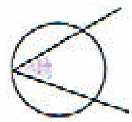
DENOMINACION	DEFINICION	PROPIEDAD
❖ **Ángulo llano** 	Es cualquier semiplano, sus lados son semirrectas opuestas incluidas en el borde del semiplano.	Notación: $\widehat{aOb} = 180°$
❖ **Ángulos consecutivos** 	Ángulos con un lado en común, y tal que ninguno de ellos está incluido en el otro	
❖ **Ángulos adyacentes** 	Ángulos con un lado en común, y cuyos otros dos lados son semirrectas opuestas .	Su suma es igual a un ángulo llano $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$
❖ **Ángulo recto** 	Ángulo igual a un adyacente	Notaciones: $\hat{\alpha} = 90°$, $\hat{\alpha} = 1R$
❖ **Ángulo agudo** 	Ángulo menor que un ángulo recto.	$0° < \hat{\alpha} < 90°$
❖ **Ángulo obtuso** 	Ángulo mayor que un ángulo recto.	$90° < \hat{\alpha} < 180°$
❖ **Ángulo completo** 	Es un plano. Sus lados son semirrectas coincidentes.	Notación: $\widehat{aOb} = 360°$
❖ **Ángulo nulo** 	Es cualquier semirrecta; el origen coincide con el vértice y la semirrecta coincide con los lados	Notación: $\widehat{aOb} = 0°$
❖ **Ángulos opuestos por el vértice** 	Ángulos que cumplen que cada lado de uno, es una semirrecta opuesta a un lado del otro.	Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

DENOMINACION	DEFINICION	PROPIEDAD
❖ **Ángulos complementarios** 	Dos ángulos, cuya suma es igual a un ángulo recto.	$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=90^\circ$
❖ **Ángulos suplementarios** 	Dos ángulos cuya suma es igual a un ángulo llano	$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=180^\circ$
❖ **Ángulos interiores de un triángulo.** 	Ver definición, en capítulo1 numeral 12	Su suma es igual a un ángulo llano. $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}=180^\circ$
❖ **Ángulo externo de un triángulo.** 	Ángulo adyacente a cualquier ángulo interior.	Un ángulo externo es igual a la suma de los interiores, no adyacentes a él. $\widehat{\delta}=\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$
❖ **Ángulos alternos internos** 	Ángulos internos, ubicados en distintos semiplanos respecto de la recta secante (r), y de distinto vértice.	Dos rectas paralelas (a) y (b), determinan ángulos alternos internos iguales y recíprocamente. $a \parallel b \Leftrightarrow \widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$
❖ **Ángulos correspondientes** 	Ángulos, uno interior y otro exterior, ubicados en igual semiplano respecto de la recta secante (r), y de distinto vértice.	Dos rectas paralelas (a) y (b), determinan ángulos correspondientes iguales, y recíprocamente. $a \parallel b \Leftrightarrow \widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$

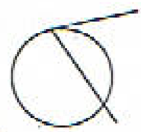
2.2 ANGULOS RELACIONADOS CON CIRCUNFERENCIAS

- **Ángulo al centro** ⟹ Ángulo con vértice en el centro de la circunferencia: ⟹

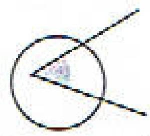
- **Angulo inscrito** ⟹ Ángulo con vértice en un punto de la circunferencia; y lados secantes con la misma ⟹



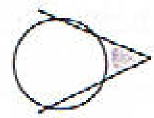
- **Angulo semi-inscrito** ⟹ Ángulo con vértice en un punto de la circunferencia, y cuyos lados son uno tangente y otro secante a la misma. ⟹



- **Ángulo interior** ⟹ Ángulo cuyo vértice es un punto interior a la misma. ⟹



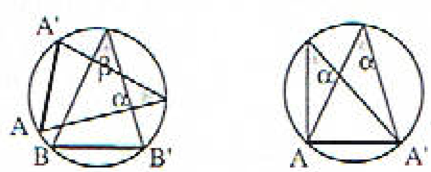
- **Ángulo exterior** ⟹ Ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la misma. ⟹



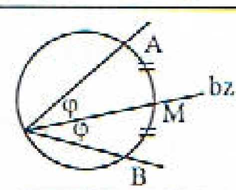
PROPIEDADES

- El ángulo inscrito (semi-inscrito) es igual a la mitad del ángulo al centro que abarca el mismo arco.

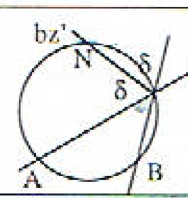
- Ángulos inscritos iguales, determinan arcos iguales, y recíprocamente.
  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \widehat{AA'} = \widehat{BB'}$



- La bisectriz interior de todo ángulo inscrito, contiene al punto medio del arco abarcado.



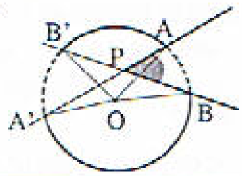
- La recta que contiene a una bisectriz exterior, (bisectriz de un ángulo adyacente), de todo ángulo inscrito, contiene al punto medio del arco no abarcado por el ángulo.



PROPIEDADES

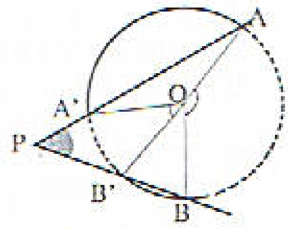
- Todo ángulo interior es igual a la semisuma de los ángulos al centro, que corresponden a los arcos abarcados, por dicho ángulo y por su opuesto por el vértice.

$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{A'OB'}}{2}$$



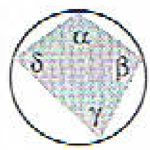
- Todo ángulo exterior cuyos lados cortan o son tangentes a una circunferencia, es igual a la semidiferencia positiva de los ángulos al centro que corresponden a los arcos abarcados por sus lados.

$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AOB} - \widehat{A'OB'}}{2}$$



- En todo cuadrilátero, cuyos vértices pertenecen a una circunferencia, (inscriptible), los ángulos opuestos son suplementarios.

$\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} = 180°$ y $\widehat{\beta} + \widehat{\delta} = 180°$

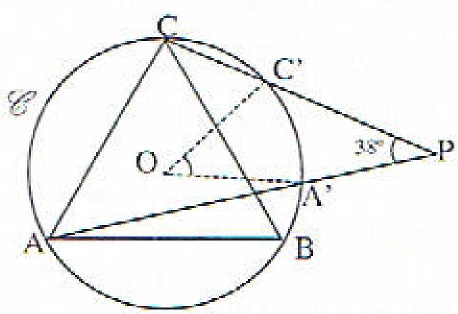


2.3 EJEMPLO

Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O, y en ella un triángulo equilátero inscrito $\overset{\triangle}{ABC}$. Se considera un punto exterior P, tal que los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PA}$ cortan a $\mathscr{C}$ en C' y A' respectivamente, y $\widehat{CPA}$=38° según figura. Deducir el ángulo C'OA'.

Considerando que el ángulo $\widehat{CPA}$ es un ángulo exterior a la cfa. $\mathscr{C}$ se utilizará la propiedad respectiva para calcular $\widehat{C'OA'}$.

$$\widehat{CPA} = \frac{\widehat{COA} - \widehat{C'OA'}}{2}$$

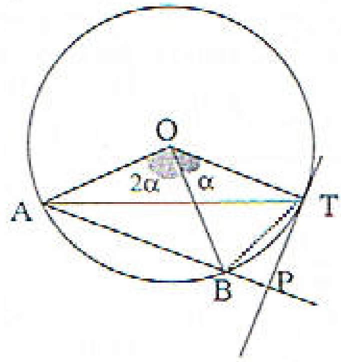


Como $\widehat{COA}$=120° (ángulo al centro de igual arco abarcado, que el ángulo inscrito $\widehat{CBA}$=60°), y CPA =38° resulta que :

$38° = \dfrac{120° - \widehat{C'OA'}}{2}$ de donde $\widehat{C'OA'}$= 44°.

2.4 EJEMPLO

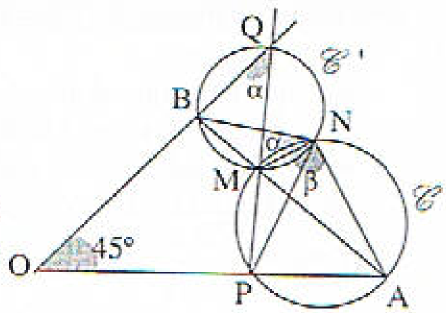
En una circunferencia de centro O, se consideran tres puntos, A, B y T, tal que $\widehat{BOT} = \alpha$ y $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Por T se traza la tangente que corta a la recta AB, en P. Hallar en función de α, todos los ángulos del triángulo $\widehat{APT}$.



- En primer lugar se puede afirmar que el ángulo $\widehat{PAT}$, es igual a $\alpha / 2$, por ser ángulo inscrito con arco $\widehat{BT}$, y ángulo al centro $\widehat{BOT} = \alpha$.
- Como el ángulo $\widehat{ATP}$, es la suma de $\widehat{ATB}$ y $\widehat{BTP}$, se hallaran previamente dichos ángulos.
  $\widehat{ATB} = \alpha$, por ser ángulo inscrito con arco $\widehat{AB}$, y ángulo central $\widehat{AOB} = 2\alpha$.
  $\widehat{BTP} = \alpha / 2$, por ser ángulo semi-inscrito con arco BT, y ángulo al centro $\widehat{BOT} = \alpha$
  Se deduce entonces que $\widehat{ATP} = \frac{3}{2}\alpha$
- Por último,considerando que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°, se cumplirá que $\widehat{APT} = 180° - (\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \widehat{APT} = 180° - 2\alpha$

2.5 EJEMPLO

Se considera un triángulo $\widehat{OAB}$ con el ángulo $\widehat{O} = 45°$. Por un punto M, del lado $\overline{AB}$, se traza una recta (r) que corta a la recta OA en P y a OB en Q.
Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$, las circunferencias determinadas por los puntos A,M y P, y por B,M y Q , respectivamente. Sea N el otro punto de intersección entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$.
Probar que el ángulo $\widehat{BNA} = 135°$



Sean $\widehat{BNM} = \alpha$ y $\widehat{MNA} = \beta$.
Se demostrará que $\alpha + \beta = 135°$

- $\widehat{BNM} = \widehat{BQM} = \alpha$, por ser ángulos inscritos en $\mathscr{C}'$ en una misma arco $\widehat{BM}$. Es posible afirmar, entonces que $\widehat{OQP} = \alpha$
- Como $\widehat{MNA} + \widehat{MPA} = 180°$,(ángulos opuestos del cuadrilátero PMNA, inscrito en $\mathscr{C}$), entonces se cumplirá que $\widehat{MPA} = 180° - \beta$,
  o sea que $\widehat{QPA} = 180° - \beta$.
  Considerando que $\widehat{QPO} = 180° - \widehat{QPA}$ (ángulos adyacentes), entonces se cumple que $\widehat{QPO} = 180° - (180° - \beta) \Rightarrow \widehat{QPO} = \beta$
- Por último , en el triángulo $\widehat{OPQ}$, la suma de sus ángulos es $\widehat{QOP} + \widehat{OQP} + \widehat{QPO} = 180°$, o sea , $45° + \alpha + \beta = 180°$, lo que implica que $\alpha + \beta = 135°$, como se quería probar.

2.6 EJERCICIOS

1. Dado un cuadrilátero ABCD, con AB || CD, $\widehat{B} = 100°$ y $\widehat{D} = 60°$, deducir $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$.

2. Sea $a\widehat{O}b$ un ángulo agudo, y dos puntos C y D, pertenecientes a la semirrecta $\overline{Ob}$. Por C se traza la perpendicular (r) a $\overline{Oa}$, que la corta en F, y por D la perpendicular (s) a $\overline{Ob}$, que corta a (r), en E. Por C, se traza la recta t || s, que corta a $\overline{Oa}$, en A. Demostrar que los triángulos OFC, CFA y EDC, tienen los mismos ángulos.

3. Sean $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABD}$ dos triángulos con $\widehat{D} = \widehat{C} = 90°$, y con C y D en semiplanos opuestos de borde AB. Demostrar que $\widehat{CBD} + \widehat{CAD} = 180°$.

4. Construir un paralelogramo cualquiera, y trazar sus cuatro bisectrices interiores. Demostrar que los puntos de corte entre ellas determinan un rectángulo.

5. Sea $a\widehat{O}b$ un ángulo agudo. Por un punto N perteneciente a la semirrecta $\overline{Oa}$, se traza la recta (p), paralela al otro lado, que corta a la bisectriz del ángulo $a\widehat{O}b$ en M. Probar que el triángulo $\widehat{OMN}$, tiene dos ángulos iguales.

6. En el ejemplo 2.3 de este módulo, sea {Q}=AA' ∩ BC. Calcular $A\widehat{Q}C$, si Además se sabe que $A'\widehat{O}B = 26°$

7. Sea ABCD un paralelogramo, en sentido antihorario con $\widehat{D} > \widehat{A}$. La bisectriz del ángulo $A\widehat{D}C$ corta a AB, en E, y a BC en F: Demostrar que los triángulos $\widehat{AED}$ y EFB, son isoángulos.

8. En un triángulo $\widehat{ABC}$, las bisectrices de los ángulos interiores $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, se cortan en un punto I. Deducir el ángulo $B\widehat{I}C$, sabiendo que $\widehat{A} = 50°$.

9. En un triángulo $\widehat{ABC}$ cualquiera y acutángulo, sean O el circuncentro (punto de corte de las mediatrices), I el incentro (punto de corte de las bisectrices), y H el ortocentro (punto de corte de las rectas que contienen las alturas).
Sea el ángulo $\widehat{A} = \alpha$. Calcular en función de α, los ángulos $B\widehat{H}C$, $B\widehat{O}C$ y $B\widehat{I}C$, efectuando un dibujo para cada caso.

10. Sean los puntos A ,B ,C y D, pertenecientes a una circunferencia de centro O, y en sentido antihorario, tal que $A\widehat{O}B = 150°$ y $C\widehat{O}D = 40°$. Se consideran los puntos {F}= AC ∩ BD, y {E}= AD ∩ BC. Deducir los ángulos $A\widehat{F}B$ y $A\widehat{E}B$.

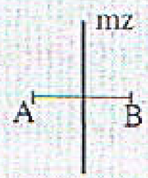
11. Sean los puntos A ,B ,C y D, pertenecientes a una circunferencia de centro O, y en sentido antihorario, con $A\widehat{O}B = 120°$, $C\widehat{E}D = 110°$, y AC ∩ BD = {E}.
Calcular el ángulo $C\widehat{O}D$.

12. ABCDE es un pentágono regular cuyos vértices pertenecen a una circunferencia, de centro O. Sea {P}= AD ∩ BE. Deducir el ángulo $A\widehat{P}B$.

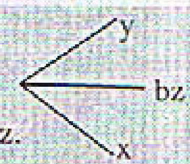
3. INTERSECCIONES DE LUGARES GEOMETRICOS

3.1 DEFINICIONES

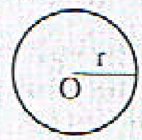
- **MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO**
  El lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan de los extremos de un segmento $\overline{AB}$, es la recta perpendicular al mismo, por su punto medio, llamada mediatriz.



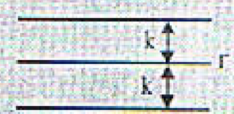
- **BISECTRIZ DE UN ANGULO**
  El lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan de los lados de un ángulo convexo $\widehat{x,y}$ es la semirrecta interior que determina con los lados dos ángulos iguales, llamada bisectriz.



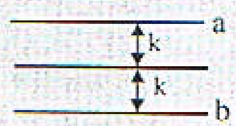
- **CIRCUNFERENCIA**
  Es el lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan una medida **r** (radio), de un punto O, llamado centro.



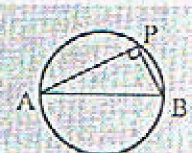
- **UNION DE PARALELAS**
  El lugar geométrico de los puntos del plano, que distan una medida **k**, de una recta (r), es la unión de dos rectas paralelas a la primera, a una distancia **k** de ella.



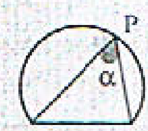
- **PARALELA MEDIA**
  El lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan de dos rectas paralelas (a) y (b), es una recta paralela a ellas, situada a igual distancia de ambas.



- **LUGAR GEOMETRICO DE THALES**
  El lugar geométrico de los puntos del plano, que son vértices de ángulos rectos, cuyos lados pasan por dos puntos A y B, es la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, excluidos estos puntos.

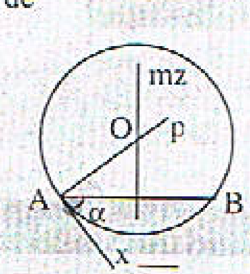


- **ARCO CAPAZ**
  El lugar geométrico de los puntos, que son vértices de ángulos de igual medida α, y cuyos lados pasan por dos puntos A y B, (en uno de los semiplanos de borde la recta AB), es un arco de circunferencia de extremos A y B, excluidos estos puntos.



Construcción

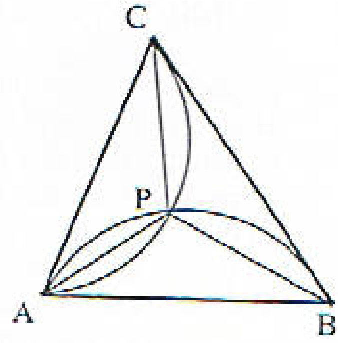
1. Se ubica el segmento $\overline{AB}$
2. Se construye el ángulo $\widehat{BAx} = \alpha$, en el semiplano opuesto al arco.
3. Se traza la perpendicular (p) a la recta (x), por A.
4. Se traza la mediatriz del segmento AB
5. La intersección de (p), con la mediatriz, es el centro O y el radio es $\overline{OA}$



3.2 EJEMPLO

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, hallar un punto interior P, que sea vértice común , a tres ángulos consecutivos de igual amplitud, y cuyos lados contengan a los puntos A, B y C.

Se observa que la suma de los tres ángulos consecutivos de vértice P, es igual a un ángulo completo (360º), y como todos deben tener igual amplitud, cada uno de ellos es igual a 120º.
Se deduce entonces que P, pertenecerá a la intersección de los arcos capaces de segmentos los lados del triángulo, y ángulo 120º. Para hallar P se intersectan dos arcos, por ejemplo $\mathscr{A}_{\overline{AB},120^\circ}$, con $\mathscr{A}_{\overline{AC},120^\circ}$,con lo cual se determina el punto P, tal que $\widehat{APB} = 120^\circ$ y $\widehat{APC} = 120^\circ$, resultando necesariamente $\widehat{BPC} = 120^\circ$



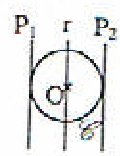
3.3 EJEMPLO

Dados un punto O, y una recta (r), hallar los puntos P_i del plano, que disten una medida k del punto y de la recta. Discutir número de puntos solución según la posición relativa entre O y (r).

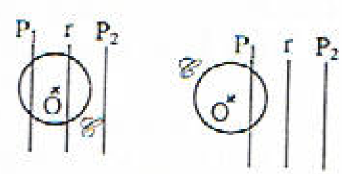
Como el punto P, debe estar a una distancia k de O, entonces pertenece a la circunferencia de centro O y radio k, $\mathscr{C}_{O,k}$.
Así mismo como la distancia entre P y (r) es k, entonces P pertenece a la unión de las paralelas (p_1) y (p_2), situadas a una distancia k de (r).
La intersección entre $\mathscr{C}$ y las paralelas (p_1) y (p_2), determinaran los puntos solución.

Discusión

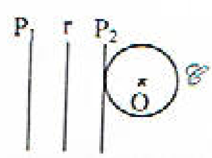
- Si $O \in r$, existen dos puntos solución, ya que las rectas (p_1) y (p_2), serán tangentes a $\mathscr{C}$.



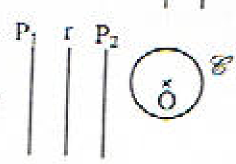
- Si la distancia entre O y (r) es menor que 2 k y distinta de cero, existen dos puntos solución, ya que una de las paralelas será secante a la circunferencia y la otra exterior.



- Si la distancia entre O y (r) es igual a 2k, existe un único punto solución ya que una de las paralelas será tangente y la otra exterior a $\mathscr{C}$.



- Si la distancia entre O y (r) es mayor que 2k, no existe ningún punto solución , ya que ambas paralelas serán exteriores a $\mathscr{C}$.



3.4 EJERCICIOS

1. Sea un segmento $\overline{AB} = 5$ cm .
   a) Construir el conjunto de los puntos del plano que distan 4 cm. de A.
   b) Hallar los puntos del plano que distan 4 cm. de A y 3 cm. de B .

2. Se considera un segmento $\overline{AB} = 6$ cm.
   Hallar los puntos del plano que verifiquen las siguientes condiciones en cada caso :
   a) puntos M, tal que $\overline{AM} = 4$ cm. y $\overline{BM} = 2$ cm
   b) puntos N, tal que $\overline{AN} = 3$ cm. y $\overline{BN} = 1$ cm.
   c) puntos P, tal que $\overline{AP} = 8$ cm. y $\overline{BP} = 2$ cm.
   d) puntos Q, tal que $\overline{AQ} = 10$ cm. y $\overline{BQ} = 2$ cm.
   Enunciar una regla general que permita establecer el número de soluciones.

3. Determinar los puntos del plano que disten 3 cm. de una recta (r) y 4 cm. de un punto A exterior . Discutir número de soluciones según la posición de A y (r).

4. Determinar los puntos del plano que equidisten de dos de los lados de un triángulo cualquiera, y disten una medida x, del tercer lado.

5. Construir la bisectriz interior de un ángulo cuyo vértice se encuentra fuera de los limites del dibujo. (vértice inaccesible).

6. Dados dos puntos A y B, y una recta (r), hallar los puntos del plano que equidisten de A y B, y disten 4 cm. de (r) . Discutir número de puntos solución.

7. Dadas dos rectas paralelas (r) y (s), y un punto P interior a ambas, hallar los puntos del plano que equidisten de (r) y (s), y disten 3 cm. de P. Discutir nº de soluciones.

8. En un triángulo $\widehat{ABC}$, se consideran dos puntos $M \in \overline{AB}$, y $N \in \overline{AC}$ cualesquiera. Hallar un punto que equidiste de las rectas MB, NC y MN..

9. Construir un arco capaz para cada uno de los siguientes casos :
   a) $\overline{AB} = 5$ cm. y $\widehat{\alpha} = 45°$, b) $\overline{CD} = 4$ cm. $\widehat{\beta} = 90°$, c) $\overline{EF} = 6$ cm $\widehat{\varphi} = 120°$

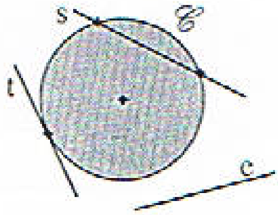
10. Dados tres puntos A, B y C alineados y en ese orden, hallar un punto P que cumpla que $\widehat{APB} = 75°$ y $\widehat{BPC} = 60°$.

11. Dado un segmento $\overline{AB} = 6$ cm, hallar cuatro puntos P_i del plano que cumplan que $\widehat{AP_iB} = 45°$, y disten 2 cm. de la recta AB.

12. Dado un segmento $\overline{AB} = 5$ cm hallar dos puntos P_i del plano que disten 3 cm de A y tal que $\widehat{APB} = 60°$.

4. CIRCUNFERENCIAS

4.1 POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA

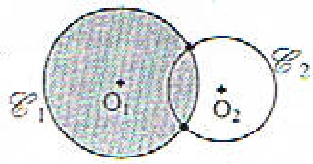


- **Recta secante**
  Su intersección con la circunferencia son dos puntos.
- **Recta tangente**
  Su intersección con la circunferencia es un punto.
- **Recta exterior**
  No tiene puntos en común con la circunferencia.

4.2 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

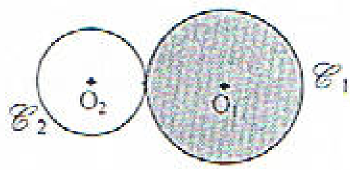
- **Circunferencias secantes**
  Su intersección son dos puntos.
  Se cumple la siguiente relación con sus radios :

  $$r_1 + r_2 > \overline{O_1 O_2}$$



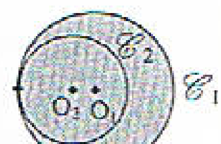
- **Circunferencias tangentes exteriores**
  Su intersección es un punto alineado con los centros, y cumplen la siguiente relación :

  $$r_1 + r_2 = \overline{O_1 O_2}$$



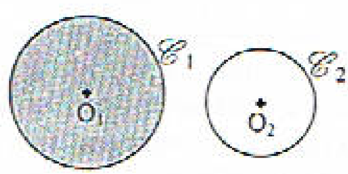
- **Circunferencias tangentes interiores**
  Su intersección es un punto alineado con los centros, y cumplen la siguiente relación :

  $$|r_1 - r_2| = \overline{O_1 O_2}$$



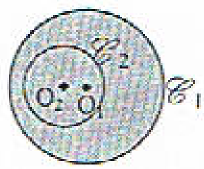
- **Circunferencias exteriores**
  Circunferencias sin puntos en común, y que cumplen la siguiente relación :

  $$r_1 + r_2 < \overline{O_1 O_2}$$



- **Circunferencias interiores**
  Circunferencias sin puntos en común, y que cumplen la siguiente relación :

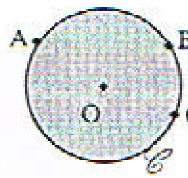
  $$|r_1 - r_2| > \overline{O_1 O_2}$$



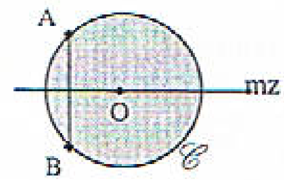
- **Circunferencias concéntricas**
  Circunferencias del mismo centro.

4.3 PROPIEDADES

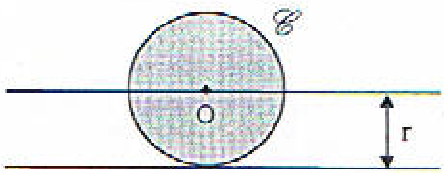
* Dados tres puntos no alineados, existe y es única la circunferencia que los contiene



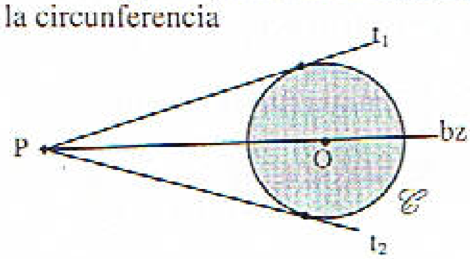
* La mediatriz de toda cuerda, contiene al centro de la circunferencia .



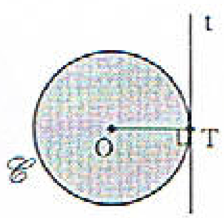
* Una de las rectas paralelas a una tangente, a una distancia igual al radio, contiene al centro de la circunferencia.



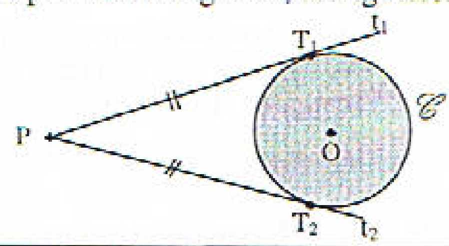
*La bisectriz del ángulo formado por dos rectas tangentes, contiene al centro de la circunferencia



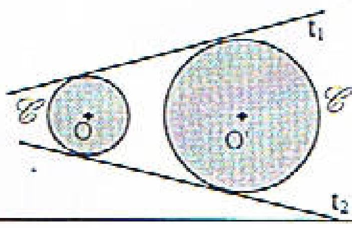
* Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular, a la recta determinada por el centro y el punto de tangencia.



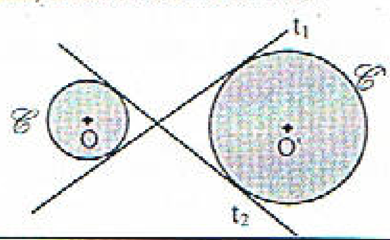
* Si desde un punto exterior P, se trazan las tangentes a la circunferencia, los segmentos determinados, por este punto con los puntos de tangencia, son iguales.



* Se denomina tangente común exterior a dos circunferencias, a cada recta tangente común que deja en igual semiplano, de borde ella misma, a ambas circunferencias.



* Se denomina tangente común interior a dos circunferencias, a cada recta tangente común, que deja en semiplanos opuestos, de borde ella misma, a las circunferencias.

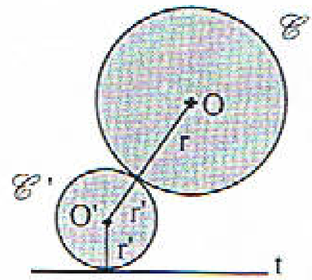


4.4 EJEMPLO

Dadas una recta (t) y una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio **r**, construir una circunferencia $\mathscr{C}$ ', de radio dado **r'** , y que sea tangente a $\mathscr{C}$ y a (t).
Discutir según la posición de $\mathscr{C}$ y (t), la solución al problema.

Figura de análisis

En primer lugar se efectuará una figura auxiliar de análisis como si el problema estuviera resuelto, con el fin de deducir las propiedades que nos permitan una posterior construcción. Con tal finalidad a partir de $\mathscr{C}$ ', se construye una circunferencia tangente $\mathscr{C}$ cualquiera, y una recta tangente (t).

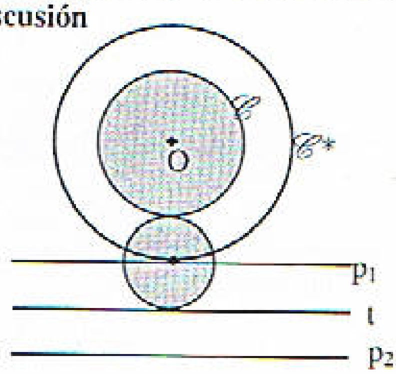


Como la distancia entre el centro O', y la recta tangente (t) debe ser **r'**, se cumplirá que el centro O' pertenecerá a la unión de paralelas a (t) a una distancia **r'**. Sean (p_1) y (p_2).
Además como la distancia $\overline{OO}$' debe ser igual a **r + r'**, se cumplirá que el centro O', pertenecerá a una circunferencia de centro O y radio **r + r'**. Sea $\mathscr{C}$*.
El centro O' de la circunferencia buscada, es la intersección de $\mathscr{C}$* con las paralelas.

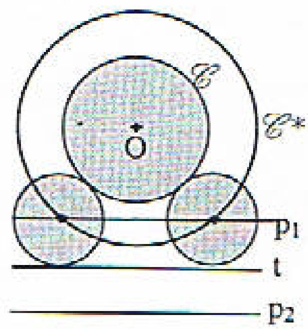
Construcción

1. Se trazan la rectas (p_1) y (p_2), paralelas a (t) a una distancia **r'**
2. Se construye la circunferencia de centro O y radio **r + r'**
3. Los posibles centros O', son las intersecciones de (p_1) y (p_2) con $\mathscr{C}$*.
4. Se construyen las circunferencias solución $\mathscr{C}$ ', de centro O' y radio **r'**.

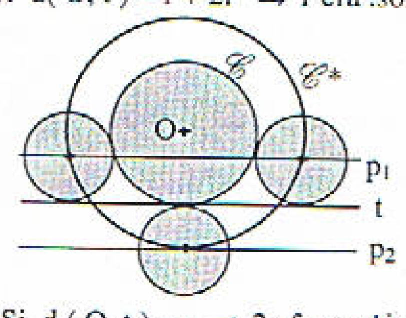
Discusión



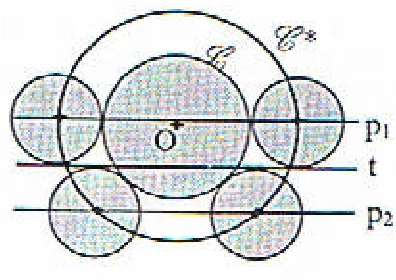
* Si d(O, t) = r + 2r' ⇒ 1 cfa .solución



* Si r < d (O, t)< r +2r' ⇒ 2 cfas. solución



* Si d (O, t) = r ⇒ 3 cfas. solución
* Si d (O, t) > r + 2 r' ⇒ la solución es vacía



* Si d (O, t) < r ⇒ 4 cfas. solución

4.5 EJERCICIOS

1. Construir la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.

2. Construir la circunferencia que pasa por dos puntos A y B y su centro pertenece a una recta dada (s).

3. Construir una circunferencia de radio dado **r**, y que cumpla las siguientes condiciones en cada caso : a) contiene dos puntos dados A y B.
   b) contiene un punto dado P, y es tangente a una recta (t).
   c) es tangente a dos rectas dadas (s) y (t).

4. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas paralelas (a) y (b),y contenga a un punto P, situado entre las paralelas.

5. Trazar una circunferencia $\mathscr{C}$ de radio dado **r** , y que sea tangente a dos circunferencias dadas $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$ de radios **r'** y **r''** y exteriores.
   Discutir según la posición de las circunferencias dadas, la solución.

6. Trazar una circunferencia tangente a dos circunferencias interiores no concéntricas con el mayor radio posible.

7. Por un punto P exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O, trazar las dos rectas tangentes a ella, usando únicamente regla y compás.

8. Dadas dos circunferencias exteriores y de igual radio, trazar las dos rectas tangentes comunes exteriores.

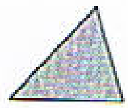
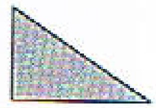
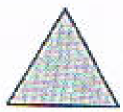
9. Trazar una recta tangente común exterior a dos circunferencias dadas de centros O' y O" , y radios $\mathbf{r'} < \mathbf{r''}$, siendo T_1 y T_2 , los puntos de tangencia.
   Sugerencia : Considerar una circunferencia de centro O_1, y radio $\mathbf{r''} - \mathbf{r'}$, y trazar desde O" las tangentes a ella.

10. Trazar una circunferencia $\mathscr{C}$ que sea tangente a otra circunferencia $\mathscr{C}'$, en un punto T de ella y que además pase por otro punto P exterior.
    Discutir el número de circunferencias solución.

11. Se considera una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. Sea M un punto cualquiera de la circunferencia y N el punto medio de $\overline{AM}$. Demostrar que N pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{AO}$.

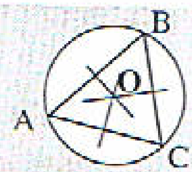
5. TRIANGULOS

según lados ⟵ **5.1 CLASIFICACION** ⟶ según ángulos

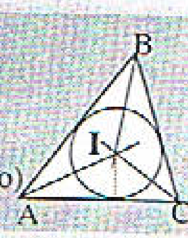
❖ **Escaleno** Triángulo con tres lados desiguales. 	★ **Acutángulo** Triángulo con tres ángulos agudos 
❖ **Isósceles** Triángulo con dos lados iguales 	★ **Rectángulo** Triángulo con un ángulo recto 
❖ **Equilátero** Triángulo con tres lados iguales 	★ **Obtusángulo** Triángulo con un ángulo obtuso 

5.2 ELEMENTOS NOTABLES

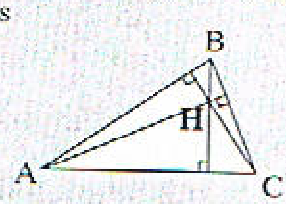
- **Circuncentro** : Punto de corte de las tres mediatrices relativas a los lados, y centro de la **circunferencia circunscrita** que contiene a los tres vértices del triángulo.



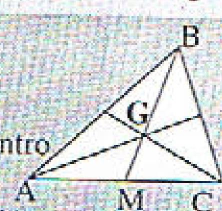
- **Incentro** : Punto de corte de las tres bisectrices interiores , y centro de la **circunferencia inscrita** , tangente a los tres lados del triángulo. (el radio queda determinado por el segmento de perpendicular trazado desde el incentro a cualquier lado)



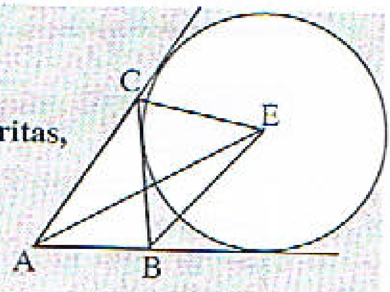
- **Ortocentro** : Punto de corte de las rectas que contienen las alturas del triángulo.
  Altura : segmento de perpendicular trazada desde cada vértice, a la recta que contiene al lado opuesto



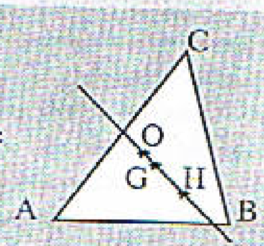
- **Baricentro** : Punto de corte de las tres medianas del triángulo.
  Mediana : Segmento determinado por cada vértice y el punto medio del lado opuesto
  Propiedad: El segmento determinado por el baricentro y el punto medio de uno cualquiera de los lados de un triángulo, es igual a un tercio de la mediana a la cual pertenecen estos puntos. Por ejemplo $\overline{MG} = 1/3\ \overline{MB}$



- **Exincentros :** Puntos de corte de una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores (bisectrices de los ángulos externos), y centros de las **circunferencias exinscritas,** tangentes a las tres rectas que contienen los lados del triángulo. Existen tres exincentros en cada triángulo.

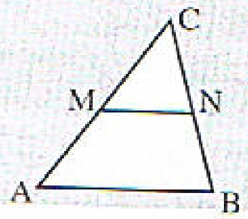


- **Recta de Euler :** El baricentro de cada triángulo está alineado con el ortocentro y el circuncentro , y a doble distancia del primero que del segundo . La recta que contiene dichos puntos, es llamada recta de Euler.



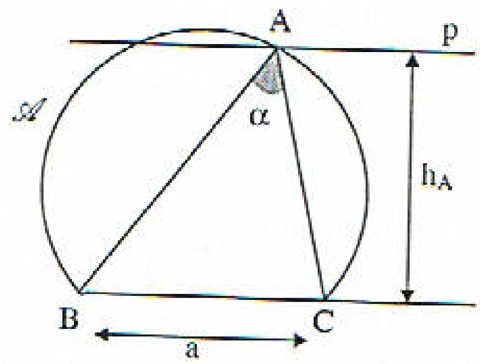
- **Paralela media :** La recta que contiene los puntos medios de los lados de un triángulo, es paralela al tercer lado, y el segmento determinado es igual a la mitad del lado paralelo.

$\overline{MN} = \overline{AB} / 2$



5.3 EJEMPLO

Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo la medida del lado $\overline{BC} = a$, el ángulo $\widehat{A} = \alpha$, y la medida de la altura de A , h_A.



- Como el ángulo $\widehat{BAC} = \alpha$, el punto A pertenecerá a un arco capaz de segmento $\overline{BC}$ (de medida **a**) y ángulo α. Sea $\mathscr{A}$.

- A su vez como la distancia entre el punto A y la recta BC, debe ser h_A, A pertenecerá a una recta paralela a la recta BC, a una distancia h_A. Sea (p).

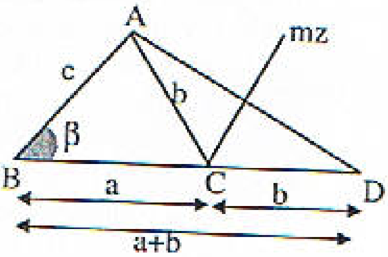
- La intersección de la paralela con el arco, determinan los posibles puntos solución A, dependiendo el número de ellos, de si (p) es secante al arco (2 puntos solución), si es tangente (1 punto solución), o exterior al mismo (solución vacía), siempre que se trabaje en un mismo semiplano de borde BC.

5.4 EJEMPLO

Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo la suma de las longitudes de dos de sus lados, **a+b**, la longitud del tercer lado, **c**, y el ángulo $\widehat{B} = \beta$.

En primer lugar se construye un triángulo auxiliar $\widehat{ABD}$, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = a+b$, y $\widehat{ABD} = \beta$,como muestra la figura. Como $\overline{BC} = a$, se cumplirá que $\overline{CD} = b$, y en consecuencia el triángulo $\widehat{ACD}$ será isósceles, o sea que $\overline{CA} = \overline{CD}$.

Para hallar el punto C basta trazar la mediatriz del segmento $\overleftrightarrow{AD}$, y donde ésta corta a BD se encuentra el punto buscado, y en consecuencia el triángulo $\widehat{ABC}$.



5.5 EJEMPLO

Dados dos puntos fijos A y B, se considera una circunferencia variable $\mathscr{C}$ que contiene a los puntos. Sea C un punto cualquiera del arco menor AB,(distinto de A y B), y M el punto medio del arco opuesto. Por M se traza la paralela (p), a la recta BC, que corta a la recta AC en el punto P.

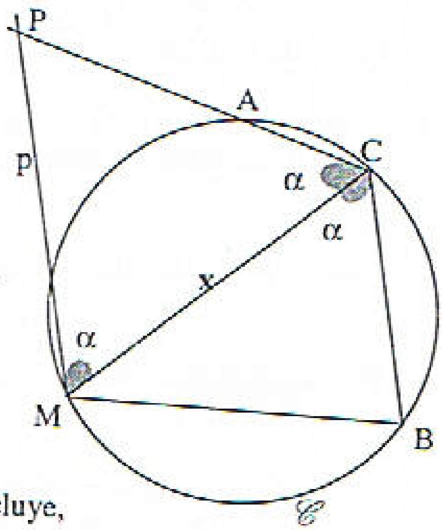
a) Clasificar el triángulo $\widehat{MPC}$.

b) Efectuar la construcción para que el triángulo $\widehat{MPC}$, resulte equilátero de lado **x** dado. Discutir posibilidad de la construcción según la medida **x**.

a) Observemos que los ángulos$\widehat{ACB}$, se mantienen constantes por ser ángulos inscritos en la circunferencia $\mathscr{C}$, de un mismo arco AB.

Sea $\widehat{ACB} = 2\,\alpha$. Como M es el punto medio del arco AB, se cumplirá la igualdad de los arcos AM y BM, y por lo tanto la de los ángulos inscritos $\widehat{ACM} = \widehat{BCM} = \alpha$.

Considerando que los ángulos $\widehat{PMC}$ y $\widehat{BCM}$ son alternos internos entre paralelas, éstos serán iguales, o sea que $\widehat{BCM} = \widehat{PMC} = \alpha$.Se concluye que el triángulo PMC tiene dos ángulos iguales ($\widehat{PMC} = \widehat{PCM} = \alpha$), y en consecuencia es isósceles.



b) Como los ángulos de todo triángulo equilátero son iguales a 60°, se debe de cumplir que si $\alpha = 60°$, entonces $\widehat{ACB} = 120°$. Se construye un arco capaz de segmento $\overleftrightarrow{AB}$ y 120°, y la circunferencia que lo incluye, luego se halla el punto medio M del arco mayor AB, y con centro en dicho punto y radio igual a **x**, se traza una circunferencia, que corta al arco menor AB, en el punto C buscado, determinándose posteriormente el punto P en las condiciones del problema.

- Si $x < \overline{AB}$ entonces la solución es vacía.
- Si $\overline{MN}$ es diámetro de $\mathscr{C}$, y $x = \overline{MN}$, existe un solo punto C solución (C = N)
- Si $\overline{AB} < x < \overline{MN}$, existen dos puntos C solución.
- Si $x > \overline{MN}$, la solución es vacía.

5.6 EJERCICIOS

1. Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, con $\overline{BC} = 6cm$, $\widehat{A} = 60°$ y $\widehat{C} = 45°$. Sobre dicho triángulo se construyen la altura respecto del vértice A, ($\overline{AH}$), la mediana de A ($\overline{AM}$), y el segmento de bisectriz del ángulo A, comprendido entre el vértice y el punto de corte con el lado opuesto, ($\overline{AV}$).
   Se denominarán a las medidas de los segmentos como sigue : $\overline{AH} = h_A$, $\overline{AM} = m_A$, $\overline{AV} = v_A$, y a los lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, y $\overline{BC} = a$.
   Reconstruir el triángulo conociendo únicamente en cada caso los elementos que se detallan a continuación : a) a, c, m_A b) a, c, h_A c) a, m_A, h_A d) a, c, $\widehat{A}$
   e) a, h_A, $\widehat{A}$ f) a, $\widehat{B}$, $\widehat{A}$ g) b, h_A, $\widehat{B}$ h) b, c, m_A i) a, m_A, $\widehat{B}$ j) v_A, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$
   k) b, v_A, $\widehat{A}$ l) b, v_A, $\widehat{C}$ m) c, h_A, v_A n) c, h_A,m_A o) a, b, b+c p) a, b, b-c
   q) a+b, b-c, c r) a, h_A, $\widehat{B}+\widehat{C}$

2. Sea una circunferencia de centro O y un punto C exterior. Por C se trazan las tangentes t' y t", siendo T' y T" los puntos de tangencia. Por un punto T variable de la circunferencia, ubicado en el semiplano de borde T' T" y que contiene a C, se considera la tangente (t) que corta a (t') en A y a (t") en B. Probar que al variar T el perímetro del triángulo $\widehat{ABC}$ se mantiene constante, e igual a 2 CT '
   Sugerencia : Utilizar la propiedad que afirma que los segmentos de tangentes trazadas desde un punto exterior son iguales.

3. Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo su perímetro, la medida de la altura h_B y $\widehat{C}$

4. Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo su perímetro, y dos de sus ángulos

5. Demostrar que en todo triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los catetos, es igual a la suma de la medida de la hipotenusa con el diámetro de la circunferencia inscrita.

6. Construir un triángulo rectángulo conociendo su perímetro, y el radio de la circunferencia inscrita.

7. En una circunferencia de centro O, se considera un punto fijo C, y un diámetro variable $\overline{A_iB_i}$. Probar que todos los triángulos $\widehat{ABC}$ tienen el mismo baricentro.

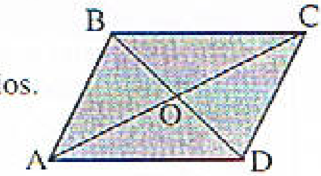
8. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo cualquiera, y M, N y P los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demostrar que el circuncentro del $\widehat{ABC}$, coincide con el ortocentro del $\widehat{MNP}$.

6.- CUADRILATEROS

6.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES

PARALELOGRAMO

Definición : Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

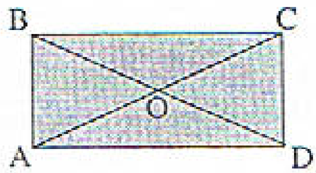


Propiedades

- Las diagonales se cortan en su punto medio, centro de simetría del paralelogramo.
- Los lados y ángulos opuestos, son iguales.
- Los ángulos no opuestos, son suplementarios
- Un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos e iguales, es un paralelogramo.
- Un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos iguales, es un paralelogramo.
- Un cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos iguales, es un paralelogramo.

RECTANGULO

Definición : Paralelogramo con ángulos rectos

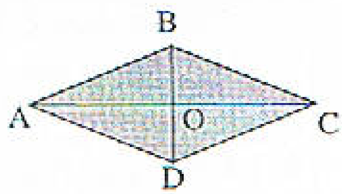


Propiedades

- Por ser paralelogramo, cumple con todas sus propiedades.
- Sus diagonales son iguales.
- Si un paralelogramo tiene sus diagonales iguales, entonces es rectángulo

ROMBO

Definición : Cuadrilátero con todos sus lados iguales.

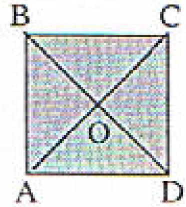


Propiedades

- Todo rombo es paralelogramo, de donde cumple sus propiedades.
- Las diagonales del rombo son perpendiculares.
- La recta que contiene cada diagonal es mediatriz de la otra diagonal.

CUADRADO

Definición : Rectángulo con cuatro lados iguales.

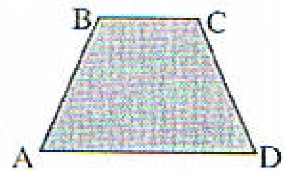


Propiedades

- El cuadrado es paralelogramo, rectángulo y rombo, por lo que cumple todas las propiedades anteriores.
- Las diagonales están incluidas en las bisectrices de los ángulos
- Todo cuadrilátero con dos diagonales iguales, perpendiculares y que se cortan en su punto medio, es un cuadrado.

TRAPECIO

Definición : Cuadrilátero con un solo par de lados opuestos paralelos.

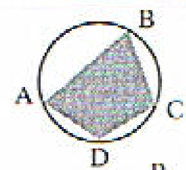


Propiedades

- Si los lados no paralelos son iguales, recibe el nombre de trapecio isósceles.
- Un cuadrilátero con dos pares de ángulos consecutivos (ángulos no opuestos) iguales y no rectos, es un trapecio isósceles.

CUADRILATERO INSCRIPTIBLE

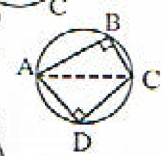
Definición : Cuadrilátero cuyos vértices son puntos de una circunferencia .



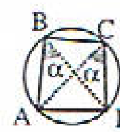
Propiedades

- La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible, es que dos ángulos opuestos sean suplementarios
  $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 180°$

- En particular si los ángulos opuestos son rectos, la diagonal que no contiene a los vértices de esos ángulos es diámetro
  $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 90° \Rightarrow \overline{AC}$ diámetro



- Si los ángulos determinados por las diagonales con dos lados opuestos son iguales entonces el cuadrilátero es inscriptible y recíprocamente.



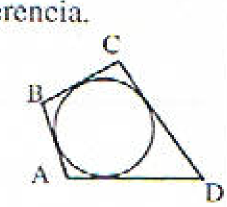
- En particular si estos ángulos son rectos, el lado opuesto es diámetro.

CUADRILATERO CIRCUNSCRIPTIBLE

Definición : Cuadrilátero cuyos lados son tangentes a una circunferencia.

Propiedad

- La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea circunscriptible es que las sumas de sus lados opuestos sean iguales. $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

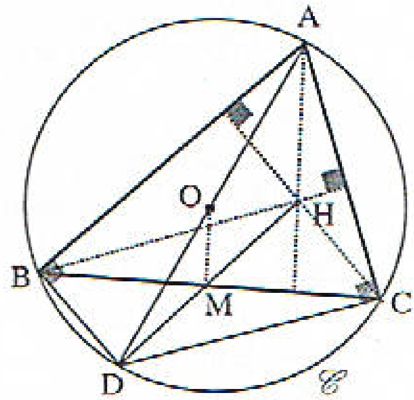


6.2 EJEMPLO

En una circunferencia $\mathscr{C}$, sea un triángulo $\widehat{ABC}$ inscripto cualquiera. Se consideran el ortocentro H, el circuncentro O, M punto medio de $\overline{BC}$, y D el punto diametralmente opuesto al punto A.

a) Deducir la naturaleza del cuadrilátero BDCH

b) Demostrar que $\overline{AH} = 2\,\overline{OM}$



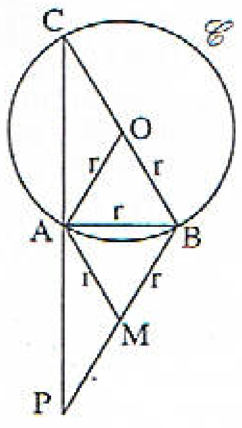
a) Como $CH \perp AB$, (la recta CH contiene a una altura del $\widehat{ABC}$), y $DB \perp AB$, ($\overline{AD}$ es diámetro, entonces $\widehat{ABD} = 90°$), se cumplirá que $CH \parallel DB$. Razonando análogamente para BH y DC, se puede afirmar que $BH \parallel DC$, de donde, el cuadrilátero BDCH, por tener sus lados opuestos paralelos, es un paralelogramo.

b) Considerando que las diagonales del paralelogramo se cortan en su punto medio, y que M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces M también será punto medio de la otra diagonal $\overline{DH}$.
En el triángulo $\widehat{ADH}$, se cumple que O es punto medio de $\overline{AD}$ y M de $\overline{DH}$, de donde resulta que $\overline{OM}$ será paralela media, y en consecuencia su medida es la mitad del lado paralelo, o sea que $2\,\overline{OM} = \overline{AH}$, como se quería demostrar.

6.3 EJEMPLO

En una circunferencia de centro O y radio r, se considera un triángulo $\widehat{ABC}$ tal que $\overline{BC}$ es diámetro y $\overline{AB} = r$. Sobre la semirrecta opuesta a $\overline{AC}$, se construye un punto P, tal que $\overline{AC} = \overline{AP}$, y sea M el punto medio de $\overline{BP}$.

Clasificar el cuadrilátero AMBO, y deducir sus ángulos.



En el triángulo $\widehat{BCP}$, O es punto medio de $\overline{BC}$ y A de $\overline{PC}$, de donde $\overline{OA}$ y $\overline{AM}$ son paralelas medias, por lo cual se puede afirmar que $\overline{AM} = \overline{OB} = r$, y $OA = \overline{BM} = r$.
Resulta entonces, que el cuadrilátero AMBO tiene sus cuatro lados de igual medida **r**, por lo que, es un rombo.
Como el triángulo $\widehat{OAB}$ es equilátero se cumplirá que $\widehat{AOB} = 60°$, y en consecuencia $\widehat{AMB} = 60°$ y
$OAM = OBM = 120°$

6.4 EJEMPLO

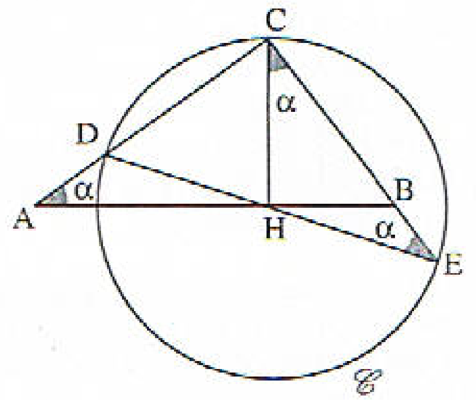
Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo rectángulo en C, y H la proyección de C sobre la recta AB. Se considera la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro H y radio $\overline{HC}$, que corta a la recta AC en D, y a BC en E.

a) Demostrar que el cuadrilátero DAEB es inscriptible.

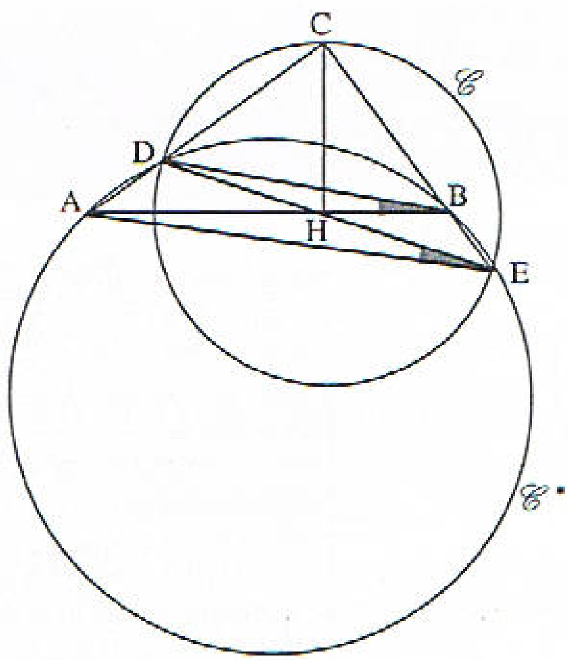
b) Demostrar que $\widehat{DBH} = \widehat{HEA}$

a) Sea el ángulo $\widehat{DAB} = \alpha$.
Se demostrará que $\widehat{DEB} = \alpha$.
En el triángulo $\widehat{ACH}$ se cumple que el ángulo $\widehat{ACH} = 90° - \alpha$, además como $\widehat{ACB} = 90°$, y $\widehat{ACH} + \widehat{HCB} = 90°$, se deduce que $\widehat{HCB} = \alpha$.
Considerando que el triángulo $\widehat{CHE}$ es isósceles pues $\overline{HC}$ y $\overline{HE}$ son radios, entonces se cumplirá que

$\widehat{HCE} = \widehat{HEC} = \widehat{HEB} = \alpha$



Se puede afirmar entonces que el cuadrilátero DAEB es inscriptible, pues los ángulos determinados por las diagonales $\overline{DE}$ y $\overline{BA}$ con los lados opuestos $\overline{AD}$ y $\overline{EB}$, son iguales.
Para hallar el centro de la circunferencia circunscrita, que llamaremos $\mathscr{C}^*$, basta cortar dos mediatrices, de cualquiera de los lados del cuadrilátero.



b) Una vez construida la circunferencia circunscrita al cuadrilátero DAEB, y observando que $\widehat{DBH} = \widehat{DBA}$ y $\widehat{HEA} = \widehat{DEA}$, como así también $\widehat{DBA} = \widehat{DEA}$, (pues son ángulos inscritos en $\mathscr{C}^*$, en un mismo arco AD), se concluye que $\widehat{DBH} = \widehat{HEA}$, como se quería demostrar.

6.5 EJERCICIOS

1. Construir un cuadrado cuyas diagonales midan 5 cm.

2. Construir rombos ABCD, (en sentido horario), con las siguientes condiciones en cada caso : a) $\overline{AB} = 4$ cm , $\overline{AC} = 7$ cm b) $\overline{AB} = 5$ cm , $\widehat{BAD} = 45°$ c) $\overline{BD} = 6$ cm , $\widehat{BAD} = 60°$.

3. Construir los siguientes paralelogramos ABCD (horarios) :
a) $\overline{BC} = 4$ cm , $\overline{BD} = 6$ cm , $\widehat{CBA} = 30°$ b) $\overline{BC} = 5$ cm , $\overline{BD} = 8$ cm , $\overline{AC} = 7$ cm
c) $\overline{AB} = 3$ cm , $\overline{AC} = 6$ cm , $\widehat{ABC} = 60°$

4. Construir los siguientes trapecios ABCD ,(horarios), con AB || CD, y tal que:
a) $\overline{CD} = 5$ cm , $\overline{AD} = 3$ cm , $\widehat{C} = 60°$, $\widehat{D} = 60°$ b) $\overline{AB} = 3$ cm $\overline{CD} = 5$ cm, $\widehat{B}=110°$, $D = 60°$ c) $\overline{AB} = 3$ cm , $\overline{BC} = 4$ cm , $\overline{CD} = 6$ cm , $\overline{AD} = 3$ cm

5. Sea un triángulo $\widehat{ABC}$, y P, Q y R, los pies de las alturas, sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, siendo H su ortocentro.
Hallar seis cuadriláteros inscriptibles .

6. Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio r, y $\overline{AB}$ un diámetro de ella.
Sea C un punto cualquiera del segmento $\overline{AB}$ y (x), una recta por C, que corta a la circunferencia en P y Q, tal que $\widehat{PCO} = 45°$. Por Q se traza la perpendicular a AB que corta a la circunferencia en N.
a) Probar que $\widehat{QNC}$ es isósceles b) Probar que NCOP es inscriptible.

7. Sea $\widehat{AOB}$ un triángulo rectángulo en O e isósceles, y un punto $H \in \overline{OB}$. Por B se considera la recta (p) perpendicular a AH, que la corta en I, y $p \cap OA = \{D\}$
a) Demostrar que el cuadrilátero BIOA es inscriptible.
b) Probar que OHID es inscriptible.

8. Sea el cuadrilátero ABCP inscrito en una circunferencia, en sentido horario.
Por P se trazan perpendiculares a las rectas BC, AC y AB, que las cortan en T, S y R respectivamente. Probar que los siguientes cuadriláteros son inscriptibles :
a) PRSA y que $\widehat{ASR}=\widehat{APR}$ b) PSCT y que $\widehat{TSC}=\widehat{TPC}$ c) TPRB y que $\widehat{TPR}=\widehat{CPA}$

9. En una circunferencia de centro O se trazan dos diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
Por C se traza la recta (s), que corta a AB en M, y a la circunferencia en N. Sea P el punto de intersección, de la tangente a la circunferencia en N, con la perpendicular a AB por M. Probar que el cuadrilátero OMNP es inscriptible.

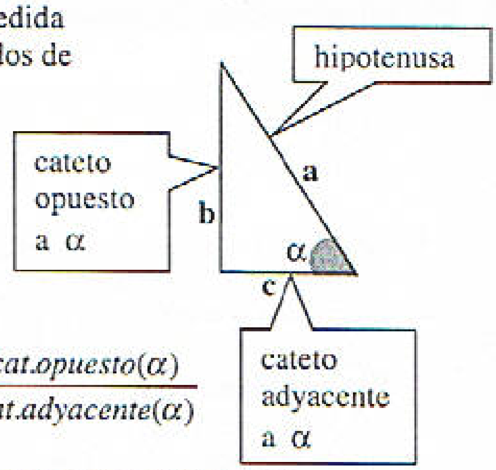
10. Sea una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, y C un punto de ella. Se consideran los cuadrados BCDE y CANM, de centros J e I. Sea K la proyección de C sobre AB.
a) Probar que I, C y J están alineados
b) Probar que IAKC y CKBJ son inscriptibles.

7. TRIGONOMETRIA, PERIMETROS Y AREAS

7.1 RELACIONES METRICAS BASICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

- **Teorema de Pitágoras**
  En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



- **Líneas trigonométricas elementales**

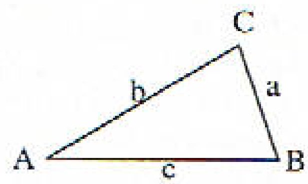
$$\text{Seno } \alpha = \frac{cat.opuesto(\alpha)}{hipotenusa},$$

$$\text{Coseno } \alpha = \frac{cat.adyacente(\alpha)}{hipotenusa} \qquad \text{Tangente } \alpha = \frac{cat.opuesto(\alpha)}{cat.adyacente(\alpha)}$$

7.2 RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

- **Teorema del seno**

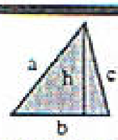
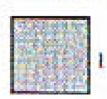
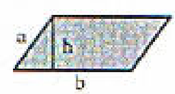
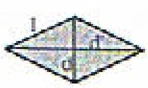
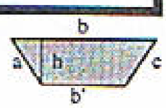
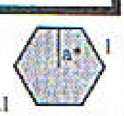
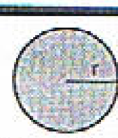
$$\frac{a}{\operatorname{sen}.\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}.\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}.\widehat{C}}$$



- **Teorema del coseno**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\widehat{A} \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\widehat{B} \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\widehat{C}$$

7.3 PERIMETROS Y AREAS

TRIANGULO	TRIANGULO EQUILATERO	CUADRADO	RECTANGULO	PARALELOGRAMO
				
P = a+b+c A= (b.h) / 2	P = 3.l A= ($\sqrt{3}$ / 4) l²	P = 4.l A = l²	P = 2.(b+h) A= b.h	P = 2.(a+b) A= b.h
ROMBO	**TRAPECIO**	**POLIGONO REGULAR**	**CFA.-CIRCULO**	**ARCO DE CFA. SECTOR CIRCULAR**
				
P = 4.l A= (d.d') / 2	P = a+b+b'+c A= (b+b').h / 2	P = n.l A= (P.a*) / 2	P = 2 π.r A= r².π	P = (r.π.n°) / 180° A= (r².π.n°) / 360°

Abreviaturas: a* → apotema, a,b,c,l → lados, h → altura, d,d' → diagonales, r → radio, n → número de lados o grados, A → área , P → perímetro

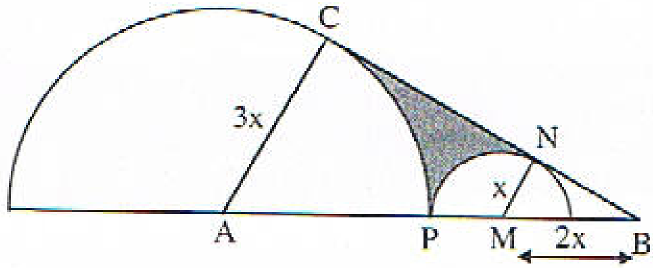
7.4 EJEMPLO

Se consideran los triángulos rectángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{MBN}$ de la figura, cuyas medidas son $\overline{AB} = 6x$, $\overline{AC} = 3x$, $\overline{MB} = 2x$ y $\overline{MN} = x$.

Se construyen las semicircunferencias de centro A y radio 3x y la de centro M y radio x, tangentes en P.

a) Hallar el área del cuadrilátero ACNM en función de x.

b) Hallar el perímetro y el área de la figura determinada por los arcos $\widehat{NP}$, $\widehat{PC}$ y el segmento $\overline{CN}$.



Considerando que $AC \parallel MN$, el cuadrilátero ACNM es un trapecio, por lo cual su área será igual a $\dfrac{(\overline{AC}+\overline{MN}).\overline{NC}}{2}$. Para calcular $\overline{NC}$, si se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{MNB}$ se deduce que $\overline{BN}^2 + x^2 = (2x)^2 \Rightarrow \overline{BN} = \sqrt{3}.x$, y en el triángulo $\widehat{ABC}$ se cumple que $\overline{BC}^2 + (3x)^2 = (6x)^2 \Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{3}.x$. Como $\overline{NC} = \overline{BC} - \overline{BN}$, entonces $\overline{NC} = 2\sqrt{3}.x$, y en consecuencia :

$$\text{Área (ACNM)} = \frac{(3x+x).2\sqrt{3}.x}{2} = 4\sqrt{3}.x^2$$

b) Para hallar el área y perímetro pedidos, se debe hallar previamente las medidas de los arcos NP y PC , así como las áreas de los sectores circulares que ellos determinan.

Se deben calcular los ángulos $\widehat{CAP}$ y $\widehat{PMN}$. En el triángulo $\widehat{ABC}$, se cumple que $\cos\widehat{A} = \dfrac{3x}{6x} \Rightarrow \cos\widehat{A} = 1/2 \Rightarrow \widehat{A} = 60°$, deduciéndose que $\widehat{PMN} = 120°$ por ser suplementario del primero.

La medida del arco PC será $\dfrac{(3x).60°\pi}{180°} = \pi.x$, y la del arco $\widehat{NP}$ será $\dfrac{(x).120°\pi}{180°} = \dfrac{2\pi.x}{3}$.

En consecuencia el perímetro de la figura pedida es igual a

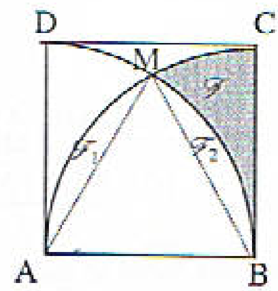
$$2\sqrt{3}.x + \pi.x + \frac{2\pi}{3}x = (2\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi)x$$

Para calcular el área se restará al área del trapecio las áreas de los sectores circulares determinados por los arcos $\widehat{CP}$ y $\widehat{NP}$.

- El sector circular de centro A tendrá un área igual a $\frac{(3x)^2.60°\pi}{360°} = \frac{3}{2}\pi.x^2$
- El sector circular de centro M tendrá un área igual a $\frac{x^2.120°\pi}{360°} = \frac{\pi}{3}x^2$
- Finalmente el área buscada será igual a $4\sqrt{3}x^2 - (\frac{3}{2}\pi.x^2 + \frac{\pi}{3}x^2) = (4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi).x^2$

7.5 EJEMPLO
Sea un cuadrado ABCD de lado x, y los arcos de circunferencias de centros A y B, y radio x, que se cortan en M. Hallar el área de la figura $\mathscr{F}$ limitada por los puntos B, M y C.

Obsérvese que el triángulo $\widehat{ABM}$ es equilátero. Sean $\mathscr{F}_1$ la figura limitada por el segmento $\overline{AM}$ y el arco AM, y $\mathscr{F}_2$ por el segmento y arco $\widehat{BM}$.



Área del sector circular de arco $\widehat{AC}$ $\Rightarrow$ $\frac{90°\pi.x^2}{360°} = \frac{\pi.x^2}{4}$

Área del $\widehat{ABM}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{4}.x^2$

Área del sector circular de arco $\widehat{BM}$ $\Rightarrow$ $\frac{60°\pi.x^2}{360°} = \frac{\pi.x^2}{6}$

Área $\mathscr{F}_1$ = Área $\mathscr{F}_2$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

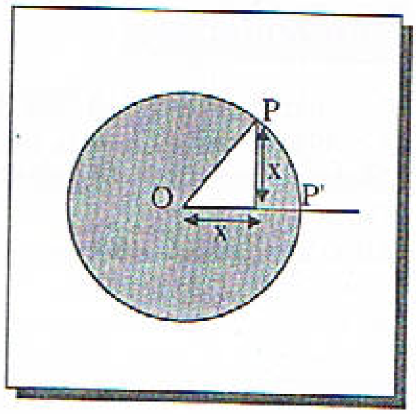
Área $\mathscr{F} = \frac{\pi}{4}x^2 - (\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2(\frac{\pi}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2)) = (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\pi).x^2$

7.6 EJERCICIOS

1. Calcular la medida **l** del lado de un cuadrado, en función de la diagonal **d.**
2. Calcular la medida **h** de la altura de un triángulo equilátero, en función del lado **l.**
3. Dado un rombo con un ángulo de 60°, calcular las medidas de las diagonales en función del lado.
4. Dado un triángulo equilátero y su circunferencia circunscrita, calcular el lado y la altura en función del radio
5. Se considera un rectángulo ABCD, con $\overline{AB} = x$ y $\overline{BD} = 2x$. Sobre la semirrecta $\overline{BC}$ se considera E tal que $\overline{BC} = \overline{CE}$.
   a) Calcular todos los lados y la diagonal mayor del trapecio ABED
   b) Hallar perímetro y área del trapecio en función de **x.**
   c) Hallar **x** para que el área sea igual a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
6. Se considera un ángulo inscrito de cuerda $\overline{AB}$ y vértice C.
   Calcular la medida de la cuerda en función del radio, en los siguientes casos:
   a) $\hat{C} = 30^\circ$ b) $\hat{C} = 45^\circ$ c) $\hat{C} = 60^\circ$
7. Calcular el lado y la apotema de un hexágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita
8. Probar que en todo triángulo rectángulo con un cateto igual a la mitad de la hipotenusa, un ángulo es igual a 60°.
9. Sea ABCD un paralelogramo en sentido antihorario, tal que $\hat{B} = 120^\circ$, $\overline{AC} = 7$ cm, $\overline{AB} = 2x$ y $\overline{BC} = x$. Hallar la medida x, el perímetro y el área.
10. En un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, con $\hat{A} = 58^\circ$ y $\hat{B} = 42^\circ$, la bisectriz del ángulo $\hat{C}$ corta a AB, en D, tal que $\overline{CD} = 12$ cm. Calcular perímetro .
11. En una circunferencia de centro O se considera un cuadrado OABC, con B perteneciente a la circunferencia , de lado 4 cm.
    Hallar perímetro y área de la circunferencia .
12. Sea un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, con $\hat{C} = 90^\circ$, $\overline{AB} = 2x$, y $\hat{B} = 60^\circ$. Se consideran la semicircunferencia $\mathscr{C}$, de diámetro $\overline{AB}$, que contiene a C, y las semicircunferencias $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$ de diámetros AC y $\overline{BC}$, exteriores al triángulo. Sean $\mathscr{F}'$ y $\mathscr{F}''$, las figuras limitadas por los arcos $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ y por $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}''$. Hallar la suma de las áreas de $\mathscr{F}'$ y $\mathscr{F}''$.
13. Se consideran los puntos A,B,C y D alineados, con $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, y se traza la circunferencia de diámetro $\overline{AD}$. En un mismo semiplano, se trazan las semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y en el semiplano opuesto, las semicircunferencias de diámetros $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$, resultando una partición del circulo inicial, en tres regiones. Demostrar que las tres regiones tienen igual área y calcularla en función del radio de la circunferencia inicial.
14. En un cuadrado ABCD con $\overline{AC} = 8$ cm , se consideran cuatro semicircunferencias interiores, de centros en los puntos medios de los lados, de radio 2 cm , tangentes dos a dos en los puntos M,N,P y Q.
    a) Calcular el área de la figura limitada por los arcos determinados por estos puntos.
    b) Generalizar para una diagonal $\overline{AC} = x$ y un radio $x / 4$.

CAPITULO 1

INCIDENCIAS ORDEN Y MEDIDAS EN EL PLANO

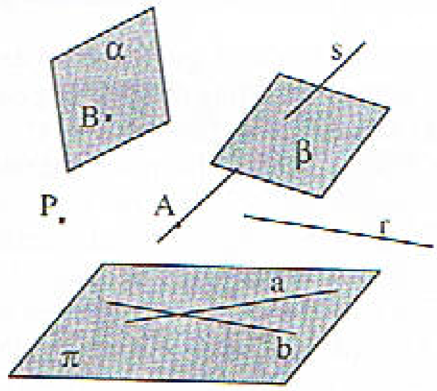


1. CONCEPTOS PRIMITIVOS

Para el inicio de la teoría se partirá de un conjunto que llamaremos espacio, **E**, a cuyos elementos llamamos puntos, (a lo cuales escribiremos con mayúsculas A, B, P, etc..).

Existen en el espacio ciertos subconjuntos denominados planos (α, β, π etc.), que a su vez incluyen otros subconjuntos de puntos llamados rectas, que anotaremos con minúsculas a, b, r, etc...

Espacio, plano, recta y punto, son pues, conceptos primitivos que no se definirán.



2. AXIOMAS DE EXISTENCIA Y ENLACE

Axioma 1.1 Existe un conjunto **E**, llamado espacio, que contiene infinitos elementos llamados puntos.

Axioma 1.2 Existen en **E** ciertos subconjuntos estrictos llamados planos, de infinitos puntos cada uno.

Axioma 1.3 Existen en cada plano ciertos subconjuntos estrictos de infinitos puntos cada uno llamados rectas.

Axioma 1.4 Para todo par de puntos distintos, existe y es única la recta a la cual pertenecen.

Observaciones

- Decimos que dos o más elementos, o conjuntos, son coplanarios si están incluidos en un mismo plano.
- En la primer parte del curso se estudiarán las propiedades que se cumplen solamente a nivel del plano. Cuando sea necesario nos referiremos a un plano genérico con la letra π.

3. POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS COPLANARIAS

Para todo par de rectas de un plano, se cumple una y sólo una de las siguientes alternativas: son la misma recta , su intersección es el conjunto vacío, o su intersección es un punto.

Demostración

Dadas dos rectas (r) y (s) del plano puede ocurrir:

- Que no tengan ningún punto en común, en tal caso su intersección es vacía recibiendo el nombre de rectas disjuntas. ⇒

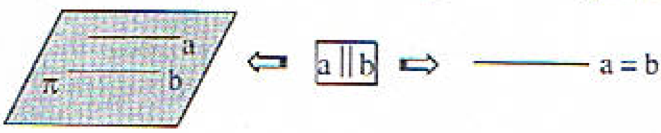
- Que tengan un único punto en común, y que denominaremos rectas secantes. ⇒

- Que tengan más de un punto en común, en tal caso, existen al menos dos puntos P y Q pertenecientes a ambas rectas. Por axioma1.4, P y Q determinan una sola recta, o sea que (r) y (s) son rectas coincidentes ⇒

4. RECTAS PARALELAS

Definición

Dos rectas son paralelas si son coplanarias disjuntas, o coincidentes.



5. AXIOMA DE ORDEN EN LAS RECTAS

Toda recta es un conjunto de puntos, abierto, denso y en el cual está definido una relación de orden total estricto, llamada preceder.

Comentarios

- Usaremos el símbolo $\prec$ para la relación preceder.
- Cuando se dice que la relación es de orden total estricto se cumplen las siguientes dos propiedades entre los puntos de la recta:

Tricotomía, para todo par de puntos A y B se cumple una y solo una de las siguientes alternativas: $A=B$, $A \prec B$ o $B \prec A$.

Transitiva , si $A \prec B$ y $B \prec C$ entonces $A \prec C$.

- Decimos que B sigue a A, ($B \succ A$) si solo si , A precede a B ($A \prec B$).
- Con el concepto de conjunto abierto, se expresa, que dado un punto cualquiera de la recta existen infinitos puntos que le preceden e infinitos puntos que le siguen.
- Cuando se dice: conjunto denso, entendemos que dados dos puntos distintos A y B, existe otro punto P, tal que P, está entre A y B, o sea, $A \prec P \prec B$, o $B \prec P \prec A$.
- Decimos que A precede o coincide con B,($A \preccurlyeq B$), si solo si, $A=B$ o $A \prec B$.
- Decimos que B sigue o coincide con A,($B \succcurlyeq A$) si solo si $A=B$ o $B \succ A$

6. SEMIRRECTAS

Definición

Dada una recta (r) en la que esta definida una relación de orden total y estricto (recta orientada), y un punto O perteneciente a ella, llamamos semirrectas de origen O incluidas en la recta (r), a los subconjuntos formados por O y todos los puntos que le siguen o preceden.

Observaciones

- Decimos que $\{X: X\in r, X \succcurlyeq O\}$ e $\{Y: Y\in r, Y \preccurlyeq O\}$ son semirrectas opuestas de origen O.
- Son puntos interiores a la semirrecta ,los puntos distintos del origen, y a la recta (r) la llamamos recta sostén. Para su notación escribimos primero el origen y luego un punto interior: $\overrightarrow{OX}$, y para la semirrecta opuesta anotaremos: op.($\overrightarrow{OX}$). También es frecuente anotar $\overrightarrow{Or}$.
- Llamamos semirrecta abierta, al conjunto de puntos interiores de la semirrecta. (Se excluye el origen).

7. SEGMENTOS

Definición

Dados dos puntos A y B que determinan una recta orientada (r), tal que $A \preccurlyeq B$, llamamos segmento $\overline{AB}$ al conjunto formado por dichos puntos y todos los puntos de (r) que siguen a A y preceden a B.

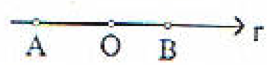
$$\overline{AB}=\{X: X\in r,\ A \preccurlyeq X \preccurlyeq B\}$$

Observaciones

- A y B reciben el nombre de extremos, y los demás puntos del segmento, interiores.
- Llamamos segmento abierto al conjunto de los puntos interiores
- Cuando los extremos coinciden, resulta un conjunto de un solo punto llamado segmento nulo.

7.1 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que dos puntos interiores A y B ubicados en semirrectas opuestas de origen O determinan un segmento al cual pertenece el origen.



2) Demostrar que dos puntos P y Q, interiores a una semirrecta determinan un segmento al cual no pertenece el origen.

8. AXIOMA DE PARTICION DEL PLANO

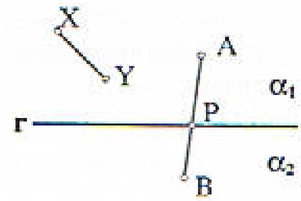
Para toda recta (r) incluida en el plano π, existen dos únicos conjuntos, α_1 y α_2, que llamaremos regiones, y que cumplen las siguientes condiciones:

1) $\{r, \alpha_1, \alpha_2\}$ es una partición del plano, o sea :

   i) $\alpha_1 \neq \emptyset$ y $\alpha_2 \neq \emptyset$ ii) $r \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 = \pi$ y

   iii) $r \cap \alpha_1 = \emptyset$, $r \cap \alpha_2 = \emptyset$, $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$

2) El segmento determinado por todo par de puntos de una misma región, esta incluido en ella.
3) Para todo punto de α_1 y para todo punto de α_2, existe en el segmento que determinan, uno y sólo un punto en común con (r).



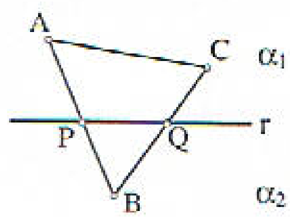
Observaciones

- Llamamos semiplanos de borde (r) al conjunto unión de la recta (r), con cualquiera de las regiones α_1 o α_2 que ésta determina.
- Un punto es interior a un semiplano, si pertenece a él y no a (r)
- Es común anotar un semiplano, nombrando el borde y un punto interior, por ejemplo $\alpha_1 = (r, A)$.
- Toda recta incluida en el plano π, determina dos semiplanos, que llamaremos semiplanos opuestos.
- Son válidos los recíprocos de las proposiciones 2 y 3 del axioma anterior, que el lector si lo cree necesario, puede demostrar por absurdo.

9. TEOREMA DE PASCH

Dada una recta y tres puntos exteriores, si la recta corta a uno de los tres segmentos determinados por los puntos entonces también corta a otro pero no al tercero.

Demostración

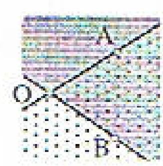


Sea P la intersección de la recta (r) con el segmento $\overline{AB}$. Se demostrará que (r) corta a $\overline{BC}$ en Q y que su intersección con $\overline{AC}$ es vacía. Como $r \cap \overline{AB} = \{P\}$, se puede afirmar, utilizando el recíproco del axioma, que A y B están en regiones distintas respecto de (r).
El punto C debe pertenecer a una de estas regiones, supongamos que pertenece a la misma que A,(en la figura a α_1, la demostración es análoga para el otro caso). Basta aplicar el axioma de partición del plano para afirmar que $\overline{AC} \cap r = \emptyset$ y que, como B y C están en distintas regiones, entonces existe un punto Q tal que $\{Q\} = \overline{BC} \cap r$.

10. ANGULOS SECTORIALES CONVEXOS

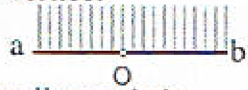
Definición

Dados tres puntos no alineados A, O y B, llamaremos ángulo sectorial convexo o simplemente ángulo convexo $A\widehat{O}B$, al conjunto intersección del semiplano de borde OA que contiene a B con el semiplano de borde OB que contiene a A.



Las semirrectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ reciben el nombre de lados y el punto O vértice.

Se llama ángulo sectorial convexo **llano** a todo semiplano.

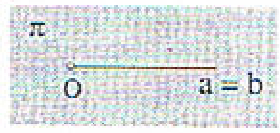


Cualquier punto O del borde del semiplano, es vértice de dicho ángulo, y las semirrectas opuestas que determina O en dicha recta se llaman lados correspondientes a dicho vértice.

Se llama ángulo sectorial convexo **nulo** a cualquier semirrecta; el origen es el vértice del ángulo y la semirrecta coincide con sus lados.

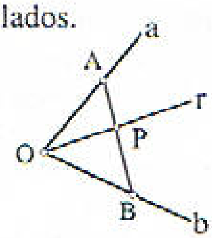
Se llama ángulo sectorial convexo **completo** a un plano.

Cualquier semirrecta del plano representa a los lados coincidentes y el origen de esa semirrecta es el vértice correspondiente a dichos lados



Observaciones

- Un punto es interior al ángulo si pertenece a él pero no a los lados.
- Cualquier semirrecta con origen en el vértice y que contenga un punto interior recibe el nombre de rayo interior, cumpliéndose que todo rayo interior corta a cualquier segmento determinado por dos puntos que pertenezcan a distintos lados del ángulo.



11. FIGURA CONVEXA

11.1 Figura

Se denomina figura, a cualquier conjunto de puntos.

11.2 Figura convexa

Decimos que una figura es convexa, si para todo par de puntos de ella, el segmento que determinan, está incluido en dicha figura.

figura convexa

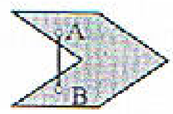


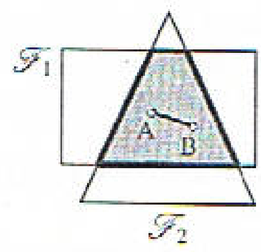
figura no convexa

11.3 Propiedad

La intersección de dos figuras convexas es una figura convexa.

<u>Demostración</u>

Por definición de intersección de conjuntos se cumple que todo par de elementos A,B pertenecientes al conjunto $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ también pertenecen en particular, a cada uno de los conjuntos $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$.



Entonces como $\mathscr{F}_1$ es figura convexa se puede afirmar que $A,B \in \mathscr{F}_1 \Rightarrow \overline{AB} \subseteq \mathscr{F}_1$ y como $\mathscr{F}_2$ también lo es, se cumplirá que: $A,B \in \mathscr{F}_2 \Rightarrow \overline{AB} \subseteq \mathscr{F}_2$,

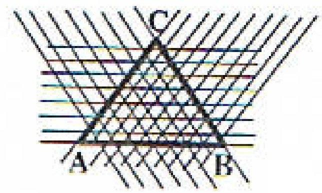
Se deduce en consecuencia que $\overline{AB} \subseteq \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$, y aplicando la definición de figura convexa se concluye que $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ es una figura convexa.

11.4 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que son figuras convexas: los puntos, los segmentos, las semirrectas, las rectas , los semiplanos, los ángulos convexos y el conjunto vacío.
2) Demuestre con un ejemplo, que la unión de dos figuras convexas puede no ser una figura convexa.

12. TRIANGULO

Dados 3 puntos no alineados A,B y C, se denomina triángulo $\widehat{ABC}$ al conjunto intersección de los semiplanos (AB,C), (BC,A) y (AC,B).



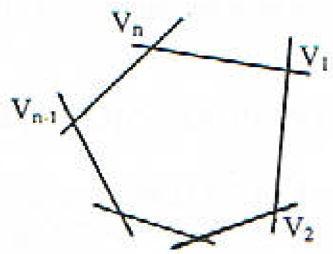
Observaciones

A,B y C reciben el nombre de vértices del triángulo, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los lados; $A\widehat{B}C$, $A\widehat{C}B$ y $B\widehat{A}C$ son los ángulos interiores, y los adyacentes a los anteriores son los externos. A la unión de los lados le llamamos contorno.

13. POLIGONO CONVEXO

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ con $n \geq 3$, puntos del plano ordenados de tal forma que 3 consecutivos no están alineados y el siguiente del último sea del primero.

Si para todo par de puntos consecutivos, los n-2 restantes quedan en un mismo semiplano con borde en la recta determinada por los iniciales, entonces; la intersección de todos los semiplanos posibles considerados de esta forma se llama polígono convexo de vértices $V_1, V_2, \ldots V_n$.



Observaciones

Los segmentos determinados por vértices consecutivos se llaman lados y los segmentos determinados por vértices no consecutivos se llaman diagonales.

Los ángulos $V_{i-1}\widehat{V_i}V_{i+1}$ reciben el nombre de interiores y según la cantidad de ellos el polígono recibe el nombre de triángulo (3), cuadrángulo (4), pentágono (5), eneágono (n).

14. AXIOMA METRICO

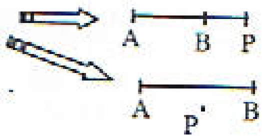
Existe una función **d,** llamada distancia, que hace corresponder a cada par de puntos del espacio (A,B), un número real k positivo o cero, que se anotará $\overline{AB}$ con las siguientes condiciones:

1. $d : E \times E \rightarrow R_0^+$

2. $\forall$ A,B se cumple $\overline{AB} = \overline{BA}$. $\Longrightarrow$

3. $P \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$ $\Longrightarrow$

4. $P \notin \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AP} + \overline{PB} > \overline{AB}$ $\Longrightarrow$



5. Para toda semirrecta $\overrightarrow{Ox}$ y para todo número real $k \geq 0$, existe y es único el punto P tal que $P \in \overrightarrow{Ox}$ y $\overline{PO} = k$. $\Longrightarrow$

Observaciones

- Se define $R_0^+ = \{ x : x \in \mathbf{R}, x \geq 0 \}$, siendo **R** el conjunto de los números reales .
- Al número real $\overline{AB}$ se le llama longitud del segmento $\overline{AB}$, o distancia entre A y B.
- Dada una (r), un punto $O \in r$, y un número real $k>0$, existen dos únicos puntos A y B pertenecientes a (r) y situados en semirrectas opuestas, tal que $\overline{OA} = \overline{OB} = k$

15. ISOMORFISMO ENTRE LA RECTA Y EL CONJUNTO DE LOS REALES

Una vez fijado un punto O sobre una recta (r) orientada existe y es única la función biyectiva, (isomorfismo), de $r \rightarrow \mathbf{R}$ que hace corresponder al punto O, el cero, y a cada punto de la recta un número real llamado abscisa del punto.

Dicha función que respeta el orden, nos permite identificar a $(r, O, \prec)$ con $(\mathbf{R}, 0, <)$, por lo cual, podemos trasladar las propiedades de los reales a los puntos de la recta, (y recíprocamente), cuando sea necesario.

Si **f** es el isomorfismo de $r \rightarrow \mathbf{R}$, al punto O le corresponde el cero, y a cualquier otro punto P el número real x_P, con las siguientes condiciones

Si $O \prec P \Rightarrow x_P = \overline{OP}$ $\Longrightarrow$

Si $P \prec O \Rightarrow x_P = -\overline{OP}$ $\Longrightarrow$

16. PUNTO MEDIO

16.1 Definición

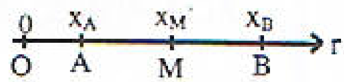
M es punto medio del segmento $\overline{AB}$,
si y sólo si $M \in \overline{AB}$ y $\overline{AM} = \overline{MB}$.

16.2 Existencia y unicidad

Existe y es único el punto medio de cada segmento.

<u>Demostración</u>

Sea la recta (r) determinada por A y B y el punto $O \in r$, tal que $O \prec A \prec B$.



Sea el isomorfismo $f: r \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(O) = 0$ $f(A) = x_A$ y $f(B) = x_B$.

Dados los números reales x_A y x_B, existe y es único el número real $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ y sea M el único punto asociado a dicho real.

Probaremos en primer lugar que $M \in \overline{AB}$. Se consideran las siguientes equivalencias : $A \prec B \Leftrightarrow x_A < x_B \Leftrightarrow x_A + x_A < x_A + x_B \Leftrightarrow 2x_A < x_A + x_B \Leftrightarrow$

$$x_A < \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow x_A < x_M \Leftrightarrow A \prec M.$$

De igual forma se prueba que $M \prec B$, de donde $A \prec M \prec B$, o sea que $M \in \overline{AB}$.

Probaremos a continuación que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Como $A \in \overline{OM}$, por axioma métrico se cumple que $\overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OM}$, por lo cual, $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$. Teniendo en cuenta que $\overline{OM} = x_M$ y $\overline{OA} = x_A$, se verifica que $\overline{AM} = x_M - x_A = \dfrac{x_A + x_B}{2} - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{2}$.

Como también $M \in \overline{OB}$ entonces $\overline{OM} + \overline{MB} = \overline{OB}$ lo que implica que $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = x_B - x_M = x_B - \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{x_B - x_A}{2}$.

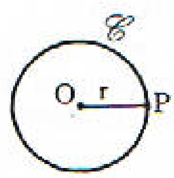
Entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y M es el punto medio de $\overline{AB}$.

Se demuestran en forma análoga los casos $A \prec O \prec B$ y $A \prec B \prec O$.

17. CIRCUNFERENCIA

17.1 Definición : Dado un punto O y un número real $r \geq 0$, se define circunferencia de centro O y radio r al conjunto

$$\mathscr{C}_{O,r} = \{P : P \in \pi,\ \overline{OP} = r\}.$$

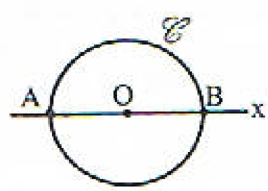


17.2 Propiedad

Toda recta (x) que contiene al centro O de una circunferencia, la corta en dos únicos puntos A y B.

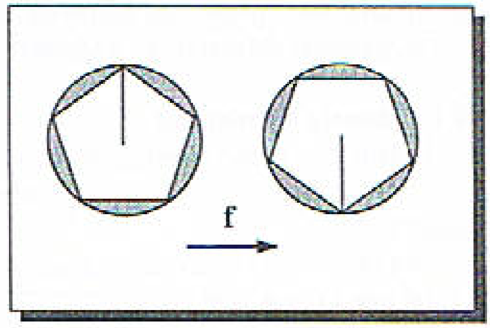
<u>Demostración</u>

Por el axioma métrico podemos afirmar que existen dos únicos puntos A y B de (x), uno en cada semirrecta opuesta de origen O tal que $\overline{OA} = r$ y $\overline{OB} = r$, de donde $x \cap \mathscr{C} = \{A, B\}$.



CAPITULO 2

ISOMETRIAS

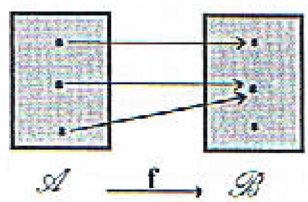


1.- FUNCIONES

Función

Dados dos conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, se define función **f**, de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, a toda correspondencia que asocia a cada elemento de $\mathscr{A}$, uno y sólo un elemento de $\mathscr{B}$.

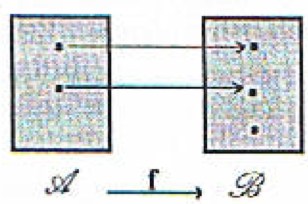
<u>Observaciones</u>



- Notación : $f : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$
- Dado $A \in \mathscr{A}$ y $f(A) = A'$, decimos que A' es la imagen de A en f , y también que A es la preimagen de A'.
- Puede ocurrir que el conjunto de partida $\mathscr{A}$ coincida con el conjunto de llegada $\mathscr{B}$, resultando una función de un conjunto en sí mismo, por ejemplo una función del plano en el plano, $f : \pi \rightarrow \pi$
- $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ reciben el nombre de dominio y codominio respectivamente.

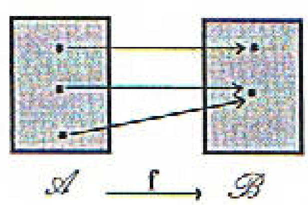
Función inyectiva

Una función es inyectiva cuando a elementos cualesquiera distintos del dominio, le asigna elementos distintos del codominio.



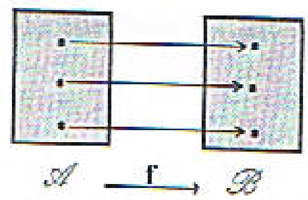
Función sobreyectiva

Una función es sobreyectiva si todos los elementos del codominio son imágenes de algún elemento del dominio.



Función biyectiva

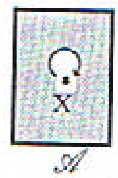
Una función es biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez .



Función identidad

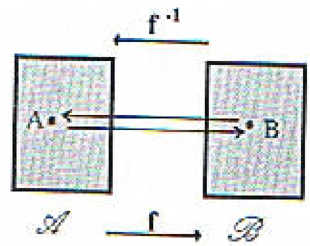
Se define función identidad, I, a la función del conjunto en sí mismo, que asocia a todo elemento de éste; el mismo elemento.

$I : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}$ tal que $I(X) = X, \forall X \in \mathscr{A}$



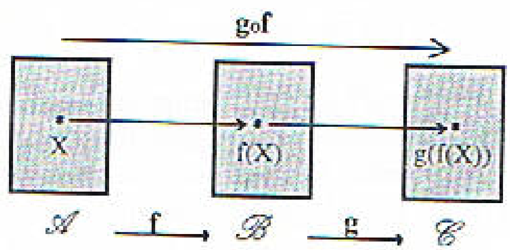
Función inversa

Toda función biyectiva **f**, tiene asociada una función también biyectiva, llamada función inversa , y que se anota $\mathbf{f^{-1}}$, tal que si f (A) =B entonces $f^{-1}(B) = A$



Función compuesta

Dadas las funciones $f : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ y $g : \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$, queda definida la función compuesta $g \circ f : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ tal que para todo $X \in \mathscr{A}$ se cumple que $g \circ f\,(X) = g(f(X))$



<u>Observaciones</u>

- En la función compuesta se escribe primero la última función que se aplica.
- Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ también es biyectiva.
- Si los conjuntos $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ coinciden , entonces f, g y $g \circ f$ son funciones del conjunto en sí mismo.

2.- ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE GRUPO

Dados un conjunto G, no vacío, y una operación $\ast$, se afirma que **(G,$\ast$)** forma una estructura de grupo, si se cumplen las siguientes condiciones :

1. <u>$\ast$ es ley de composición interna</u>

   Para todo par x,y perteneciente a G, existe $(x \ast y) \in G$, único.
2. <u>Asociativa</u>

   Para todos x,y,z pertenecientes a G, se cumple que $(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$
3. <u>Neutro</u>

   Existe un elemento $e \in G$, tal que para todo $x \in G$, se cumple que $x \ast e = e \ast x = x$
4. <u>Simétrico</u>

   Para todo $x \in G$ existe $x' \in G$ tal que se cumple que $x \ast x' = x' \ast x = e$

Comentarios

- El numeral 1, establece que el compuesto de dos elementos cualesquiera de G, siempre pertenece al conjunto y es único
- El numeral 2, afirma que el compuesto no depende de las diferentes asociaciones.
- El numeral 3, afirma la existencia de un elemento del conjunto ,llamado neutro, tal que operado con cualquier otro del conjunto, da como resultado a dicho elemento.
- El último numeral establece que todo elemento del conjunto, tiene asociado otro elemento del conjunto, llamado simétrico o también inverso en los grupos multiplicativos, tal que operados entre sí, da como resultado el neutro

3.- ISOMETRIAS

3.1 Definición

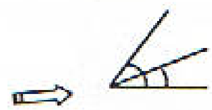
Se denomina isometría, a toda función biyectiva del plano en el plano que conserva las distancias.

Observaciones

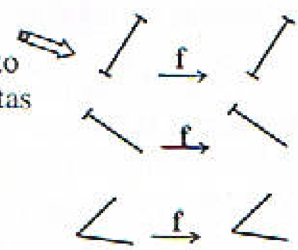
- Si $\mathscr{I}^*$ es el conjunto de todas las isometrías del plano, se cumple que:

$$f\in\mathscr{I}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1) f es una función biyectiva de puntos del plano en el plano (} f:\pi\rightarrow\pi\text{)..} \\ \text{2) Para todo par de puntos del plano A,B, se cumple que } AB=\overline{f(A)f(B)} \end{cases}$$

- Al mantenerse las distancias, ninguna isometría puede transformar un segmento en parte de sí mismo ,o un ángulo en una parte del mismo como indica la figura,(rigidez).



- Se demostrará a continuación que segmentos cerrados tienen como imágenes segmentos cerrados y por lo tanto las semirrectas se transformaran en semirrectas, las rectas en rectas y los ángulos en ángulos .
- En la definición bastaría enunciar a la función como sobreyectiva, pues toda función sobreyectiva que conserva las distancias es biyectiva.



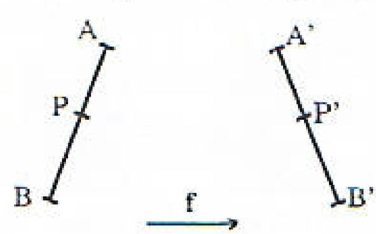
3.2 Imagen de un segmento

La imagen de un segmento en una isometría es un segmento .

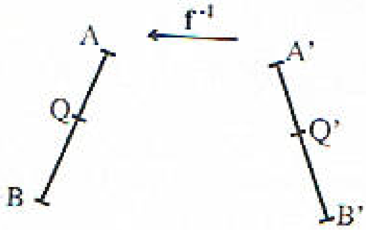
Demostración

Sea un segmento cualquiera $\overline{AB}$, f(A) =A' y f(B) = B' , imágenes en la isometría **f**.
Se probará en primer lugar que los transformados de todos los puntos del segmento AB pertenecen al $\overline{A'B'}$.

Para todo punto P del segmento $\overline{AB}$ se cumple por axioma métrico que
AP +PB = AB. Si P'= f(P) ,al conservar **f** las distancias se cumplirá que A'P'+P'B'=A'B', de donde aplicando nuevamente el axioma se deduce que P' ∈ $\overline{A'B'}$.



Recíprocamente todo punto de $\overline{A'B'}$ es un correspondiente de un punto del segmento $\overline{AB}$, ya que si $Q' \in \overline{A'B'}$, entonces, $A'Q'+Q'B'=A'B'$, y como $Q = f^{-1}(Q')$ se cumplirá que $AQ+QB=AB$; pues f^{-1} por ser isometría, también conserva las distancias, de donde, por axioma métrico se deduce que $Q \in \overline{AB}$.



4.- EL GRUPO DE LAS ISOMETRIAS

El conjunto de las isometrías del plano con la composición, forman una estructura algebraica de grupo, $(\mathscr{I}^*, \circ)$

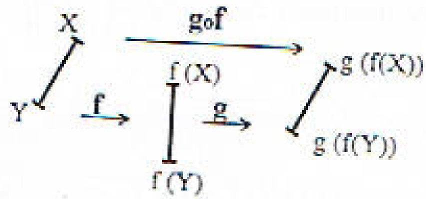
Demostración

1) $\circ$ es ley de composición interna

Se probará que para todo par de isometrías f y g , el compuesto $g \circ f$ también es una isometría. Analicemos las transformaciones de un par de puntos X,Y

$\overline{XY} \xrightarrow{f} \overline{f(X)f(Y)} \xrightarrow{g} \overline{g(f(X))g(f(Y))}$

De la primer isometría se deduce que $XY=f(X)f(Y)$, y de la segunda que $f(X)f(Y) = g(f(X))g(f(Y))$, luego por transitiva se cumple que $XY = g(f(X))g(f(Y))$, y aplicando la definición de función compuesta:



$XY = g \circ f(X) g \circ f(Y)$, de donde $g \circ f$ conserva las distancias, y como además es biyectiva, entonces pertenece al conjunto de las isometrías, como se quería demostrar.

2) Asociativa

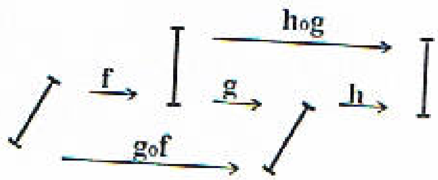
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Para la demostración se aplicará la definición de función compuesta en ambos miembros de la igualdad :

$((h \circ g) \circ f)(X) = (h \circ g)f(X) = h\,(\,g\,(f(X))\,)$

$(h \circ (g \circ f))(X) = h\,(\,(g \circ f)(X)\,) = h\,(\,g\,(f(X))\,)$

de donde queda probada la igualdad.



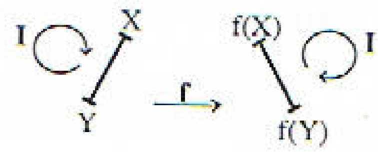
3) Neutro

La función identidad **I**, es una isometría, pues obviamente conserva las distancias y es biyectiva ya que para todo punto P del plano, verifica que **I**(P) = P, entonces:

$\overline{XY} \xrightarrow{f} \overline{f(X)f(Y)} \xrightarrow{I} \overline{f(X)f(Y)}$

$\overline{XY} \xrightarrow{I} \overline{XY} \xrightarrow{f} \overline{f(X)f(Y)}$

de donde se deduce que **I** es el neutro del grupo pues $f \circ I = I \circ f = f$



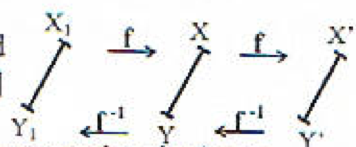
4) Inverso

Se demostrará que para toda isometría **f**, existe su simétrico en la estructura de grupo. Dicho simétrico es $\mathbf{f^{-1}}$, función inversa de la primera. Demostraremos que f^{-1} es una isometría, que además cumple que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

En primer lugar $f^{-1} : \pi \rightarrow \pi$ es una función biyectiva ya que, $f : \pi \rightarrow \pi$ lo es.

Para todo par de puntos X,Y del plano si $f(\overline{XY}) = \overline{X'Y'}$ [1], por definición de función inversa, se puede afirmar que $f^{-1}(\overline{X'Y'}) = \overline{XY}$ [2]

Como f es una isometría, de [1] se deduce que XY = X'Y' y por propiedad recíproca de la igualdad de reales X'Y'=XY. De esta última igualdad y de [2] concluimos que f^{-1} es una isometría.



Considerando la definición de función inversa, observemos las siguientes transformaciones de cualquier par de puntos X,Y del plano:

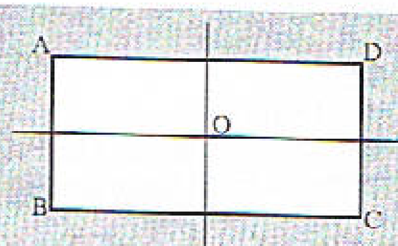
$\overline{XY} \xrightarrow{f} \overline{X'Y'} \xrightarrow{f^{-1}} \overline{XY}$, y cambiando el orden, $\overline{XY} \xrightarrow{f^{-1}} \overline{X_1Y_1} \xrightarrow{f} \overline{XY}$

de donde se concluye que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

Observación : $f(\overline{X_1Y_1}) = \overline{XY} \Leftrightarrow f^{-1}(\overline{XY}) = \overline{X_1Y_1}$

4.1 EJEMPLO

Dado un rectángulo ABCD se consideran las isometrías que lo dejan globalmente invariante; ellas son: las simetrías **f** y **g**, de ejes las paralelas medias, la simetría central **h** y la identidad **i**, que se definen como sigue:



f :	g :	h :	i :
A → D	A → B	A → C	A → A
B → C	B → A	B → D	B → B
C → B	C → D	C → A	C → C
D → A	D → C	D → B	D → D

Sea W = {f,g,h,i }. Construir una tabla con las composiciones de los elementos de W, y verificar que (W,∘) es una estructura de grupo

Para construir la tabla se deben de efectuar las composiciones entre todos los elementos de W, a modo de ejemplo sea la composición entre f y g :

$\circ$	f	g	h	i
f	i	h	g	f
g	h	i	f	g
h	g	f	i	h
i	f	g	h	i

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ A & \rightarrow & D & \rightarrow & C \\ B & \rightarrow & C & \rightarrow & D \\ C & \rightarrow & B & \rightarrow & A \\ D & \rightarrow & A & \rightarrow & B \end{array}$$

Obsérvese que $g \circ f = h$ El lector puede verificar cualquiera de las composiciones de la tabla adjunta. Así mismo puede afirmarse que $(W, \circ)$ tiene estructura de grupo, pues:

1) $\circ$ es ley de composición interna, ya que el compuesto de dos elementos cualesquiera de W pertenece a W.

2) Se cumple la propiedad asociativa, a modo de ejemplo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$$h \circ h = f \circ f$$
$$i = i$$

3) Existe el neutro del grupo, que es la isometría **i**, pues operado con cualquier elemento de W, da como resultado a dicho elemento, por ejemplo $h \circ i = i \circ h = h$

4) Cada elemento de W tiene su inverso, por ejemplo dada

$$f: \begin{array}{l} A \rightarrow D \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow B \\ D \rightarrow A \end{array}$$

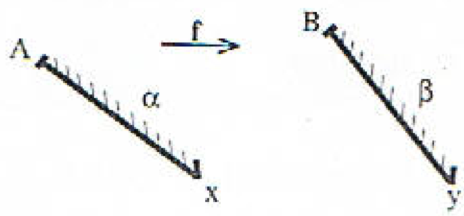
puede constatarse que su inversa f^{-1}:

$$\begin{array}{l} D \rightarrow A \\ C \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ A \rightarrow D \end{array}$$

pertenece a W, (en este caso f^{-1} es la misma isometría que **f**, pues realiza las mismas transformaciones), verificándose que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$

5. AXIOMA DE DETERMINACION DE ISOMETRIAS

Dadas dos ternas, punto, semirrecta y semiplano $(A, \overrightarrow{Ax}, \alpha)$ y $(B, \overrightarrow{By}, \beta)$, en las cuales, la semirrecta tiene como origen al punto, y el semiplano tiene como borde a la recta sostén que determina la semirrecta, **existe y es única** la isometría **f** que hace corresponder una terna en otra.



$$f: \pi \rightarrow \pi \quad / \quad (A, \overrightarrow{Ax}, \alpha) \xrightarrow{f} (B, \overrightarrow{By}, \beta)$$

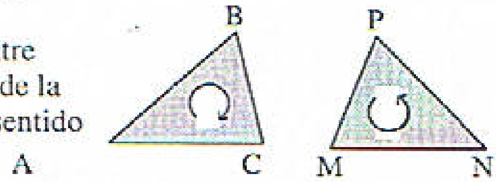
6. ISOMETRIA IDENTIDAD

Puesto que la isometría identidad hace corresponder a cada punto del plano, el mismo punto, ésta quedará determinada por las siguientes ternas correspondientes :

$$\mathbf{Id}: \pi \rightarrow \pi \quad / \quad (A, \overrightarrow{Ax}, \alpha) \xrightarrow{I} (A, \overrightarrow{Ax}, \alpha)$$

7. ISOMETRIAS DIRECTAS E INDIRECTAS

Existen dos sentidos opuestos en el plano y para identificarlos, hay que recurrir a elementos ajenos a la geometría. Un método para identificarlos, es considerar tres puntos no alineados, en un cierto orden, y distinguir entre sentido horario y antihorario. En el ejemplo de la figura los puntos A,B y C se encuentran en sentido horario, mientras que M,N y P en sentido antihorario



Otro método consiste en considerar los conceptos de derecha e izquierda en ternas punto, semirrecta orientada y semiplano. En el ejemplo de la figura el semiplano α, se encuentra a la izquierda de la semirrecta $\overline{Ax}$ y β a la derecha de $\overline{By}$, de un observador imaginario, como indica la figura.

Se define **isometría directa** a la que conserva el sentido en el plano, y por oposición **isometría indirecta**, a las que cambia el sentido.

Como sólo existen dos sentidos en el plano, se cumple que la composición de dos isometrías directas es directa; la de dos indirectas también es directa y la de una directa por una indirecta es indirecta.

Nota : Preferimos la denominación isometría indirecta y no inversa para evitar confusiones con la función inversa de cada isometría, o sea el simétrico, en la estructura de grupo.

8. FIGURAS UNIDAS Y DOBLES

8.1 Punto unido

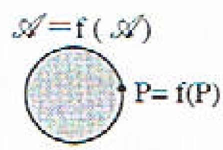
Un punto es unido en una isometría si se transforma en sí mismo

P es unido en **f** $\Leftrightarrow$ $f(P) = P$

8.2 Figura unida

Una figura es unida en una isometría si todos sus puntos son unidos.

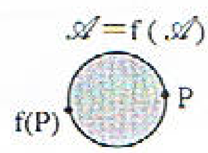
$\mathscr{A}$ es unida en **f** $\Leftrightarrow$ $\forall P \in \mathscr{A} :\ f(P) = P$



8.3 Figura doble

Una figura es doble en una isometría si su imagen es ella misma..

$\mathscr{A}$ es doble en f $\Leftrightarrow f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$



Observación

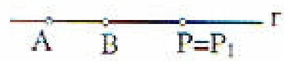
En las figuras dobles, pueden existir puntos que se transformen en otros puntos de la misma figura, mientras que en las figuras unidas todos sus puntos se transforman en si mismos.

8.4 Propiedad de las rectas unidas

Toda isometría con dos puntos unidos, deja unidos a todos los puntos de la recta que ellos determinan.

<u>Hipótesis</u>: $f(A) = A$, $f(B) = B$, $AB = r$ <u>Tesis</u>: $\forall P \in r : f(P) = P$

<u>Demostración</u>



Sean $A \prec B \prec P$, y $f(P) = P_1$

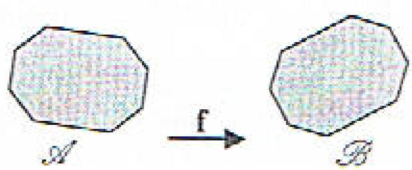
Como $B \in \overline{AP}$, considerando el axioma métrico se cumple que $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AP}$. Además como f conserva las distancias, $\overline{f(A)f(B)} + \overline{f(B)f(P)} = \overline{f(A)f(P)}$, o sea que $\overline{AB} + \overline{BP_1} = \overline{AP_1}$ y aplicando nuevamente el axioma, se cumplirá que $B \in \overline{AP_1}$, por lo cual $P_1 \in \overline{BP}$, y como $\overline{BP} = \overline{BP_1}$, se debe de cumplir que P coincide con P_1, pues existe un solo punto en la semirrecta considerada a una distancia dada. Se concluye que $f(P) = P$

Demuestre el lector los casos $P \prec A \prec B$ y $A \prec P \prec B$.

9. CONGRUENCIA

9.1 Figuras congruentes

Dos figuras son congruentes, si se corresponden en una isometría



$\mathscr{A} \cong \mathscr{B} \Leftrightarrow \exists\, f \in \mathscr{I}^* : f(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$

9.2 La congruencia como relación de equivalencia.

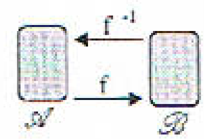
La congruencia cumple con las propiedades idéntica, recíproca y transitiva, es decir que es una relación de equivalencia..

<u>Demostración</u>

Idéntica: $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}$

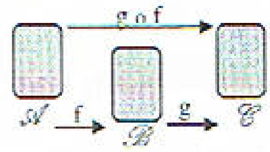
En efecto, la figura $\mathscr{A}$ es congruente con ella misma, pues existe la isometría identidad (I) que la transforma en sí misma.

$\mathscr{A} \cong \mathscr{A} \Leftrightarrow \exists\, I \in \mathscr{I}^* / I(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$



Recíproca: $\mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B} \underset{c}{=} \mathscr{A}$

Si $\mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{B}$ existe la isometría f que hace corresponder A en B.
Como el conjunto de las isometrías con la composición forman un grupo algebraico, para cada $f \in \mathscr{I}^* / f(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$, existe la isometría inversa $f^{-1} \in \mathscr{I}^*$, tal que $f^{-1}(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$, de donde $\mathscr{B} \underset{c}{=} \mathscr{A}$



Transitiva: $(\mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{B},\ \mathscr{B} \underset{c}{=} \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{C}$

$\mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{B} \Leftrightarrow \exists\, f \in \mathscr{I}^* / f(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$

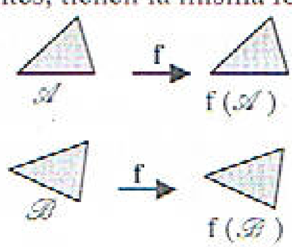
$\mathscr{B} \underset{c}{=} \mathscr{C} \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathscr{I}^* / g(\mathscr{B}) = \mathscr{C}$

Como la composición de dos isometrías es una isometría, queda determinada la función $(g \circ f) \in \mathscr{I}^* / (g \circ f)(\mathscr{A}) = \mathscr{C}$, o sea que $\mathscr{A} \underset{c}{=} \mathscr{C}$

Notación: La relación de congruencia, es una "relación de igualdad" entre figuras. Para una mayor agilidad en la notación, se usará de aquí en más, el símbolo de "=", en lugar del símbolo de " $\underset{c}{=}$ ", quedando implícito, que la relación de igualdad entre segmentos, ángulos u otras figuras, es la relación de congruencia.

10. EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que si dos segmentos son congruentes, tienen la misma longitud.
2) Demostrar que si dos figuras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son congruentes, entonces sus imágenes en una isometría cualquiera, también lo son.



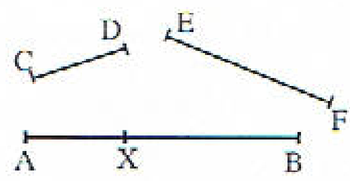
11. SUMA Y ORDEN EN SEGMENTOS Y ANGULOS

11.1 Suma

Un segmento (ángulo) es suma de otros dos, cuando existe un punto (rayo) perteneciente al mismo, que lo divide en dos segmentos (ángulos), congruentes respectivamente con los iniciales.

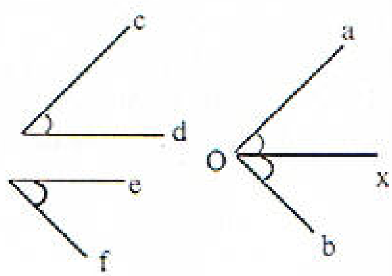
Segmentos

$\overline{AB} = \overline{CD} + \overline{EF} \Leftrightarrow \exists X \in \overline{AB} : \overline{AX} = \overline{CD}$ y $\overline{XB} = \overline{EF}$



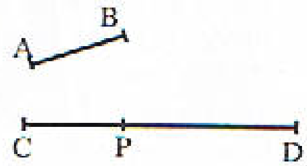
Ángulos

$\widehat{aOb} = \widehat{c,d} + \widehat{e,f} \Leftrightarrow \exists \overline{Ox} \subseteq \widehat{aOb} : \widehat{aOx} = \widehat{c,d}$ y $\widehat{xOb} = \widehat{e,f}$



11.2 Orden

Un segmento (ángulo), es menor que otro, si existe en el segundo, un punto (rayo) interior, que determina con uno de los extremos (lados), un segmento (ángulo) congruente con el primero.



Segmentos

$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \exists P \in \overline{CD} : \overline{CP} = \overline{AB}$$

Ángulos

$$\widehat{c,d} < \widehat{aOb} \Leftrightarrow \exists\ \overline{Ox} \subset \widehat{aOb} : \widehat{aOx} = \widehat{c,d}$$

Observaciones

- La resta y la relación mayor se definen a partir de las definiciones anteriores, por ejemplo $\overline{CD} > \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$
- Es evidente que la longitud del segmento suma, es la suma de las longitudes de los segmentos sumandos.

12. TEOREMAS DE TRANSPORTE E INVERSION

12.1 Teorema de transporte del segmento. (T.T.S.)

Dados dos segmentos congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ y las semirrectas $\overline{Ax}$ y $\overline{A'x'}$, que los incluyen, se cumple que las isometrías que hacen corresponder una semirrecta en otra, también hacen corresponder al segmento $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$.

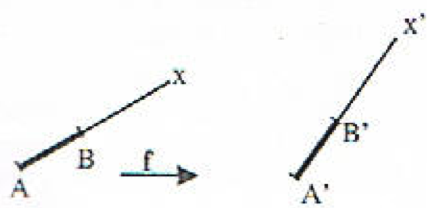
Hipótesis : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AB} \subset \overline{Ax}$, $\overline{A'B'} \subset \overline{A'x'}$
$f(\overline{Ax}) = (\overline{A'x'})$

Tesis : $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

Demostración

Por axioma métrico, existe y es único el punto perteneciente a la semirrecta $\overline{A'x'}$, que se encuentra a una distancia AB de A'.
Como las isometrías conservan las distancias, la imagen de B en f debe ser B', por lo que, se puede afirmar que $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.

Obsérvese que existen dos isometrías, que transforman $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$, una directa y otra indirecta.

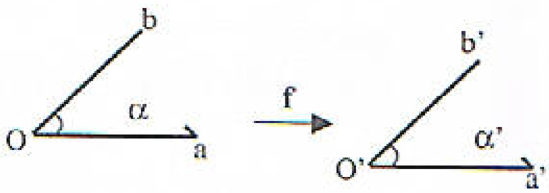


12.2 Inversión del segmento

En particular si A'=B y $\overline{A'x'} = \overline{BA}$ se cumple que $f(\overline{AB}) = \overline{BA}$. Se dice que dicha isometría invierte el segmento. Obsérvese que los segmentos son congruentes pero no idénticos, o sea que la figura es doble pero no unida en esta transformación.

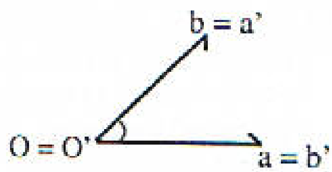
12.3. Teorema de transporte del ángulo convexo (T.T.A.C.)

Dados dos ángulos congruentes $a\widehat{O}b$ y $a'\widehat{O'}b'$, y los semiplanos α y α' de bordes (a) y (b), que los contienen, se cumple que la isometría determinada por $(O, \overrightarrow{Oa}, \alpha) \xrightarrow{f} (O', \overrightarrow{O'a'}, \alpha')$ hace corresponder al ángulo $a\widehat{O}b$ el $a'\widehat{O'}b'$



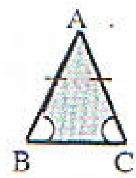
12.4 Inversión del ángulo

En particular si $O = O'$ y $\overrightarrow{O'a'} = \overrightarrow{Ob}$ se cumple que $f\,(a\widehat{O}b) = b'\widehat{O'}a'$



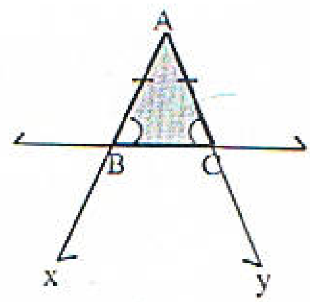
13. TRIANGULOS ISOSCELES E ISOANGULOS

Todo triángulo con dos lados congruentes (isósceles), tiene dos ángulos congruentes (isoángulo).



Demostración

Sean $\overline{AB} = \overline{AC}$ y las semirrectas $\overrightarrow{Ax}$ (de origen A que contiene a B) y $\overrightarrow{Ay}$ (de origen A que contiene a C).
Si se considera la isometría **f**, que invierte el ángulo BAC se cumplirá que ésta, efectuará las siguientes transformaciones : $\overrightarrow{Ax} \xrightarrow{f} \overrightarrow{Ay}$, $\overrightarrow{Ay} \xrightarrow{f} \overrightarrow{Ax}$
Así mismo, como $\overline{AB} = \overline{AC}$ aplicando el teorema de transporte del segmento es válido afirmar que
$B \xrightarrow{f} C$ y $C \xrightarrow{f} B$.
Como $A \xrightarrow{f} A$, se concluye que $A\widehat{B}C \xrightarrow{f} A\widehat{C}B$, por lo cual, si dichos ángulos se corresponden en una isometría deberán ser congruentes

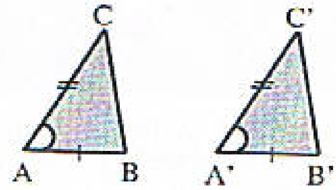


13.1 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que todo triángulo isoángulo es isósceles.
Sugerencia : aplicar teorema de inversión del segmento.

14. PRIMER CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS (L.A.L.)

Si dos triángulos tienen congruentes entre sí, dos lados y el ángulo comprendido, entonces dichos triángulos son congruentes.



Hipótesis : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$
$B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'$

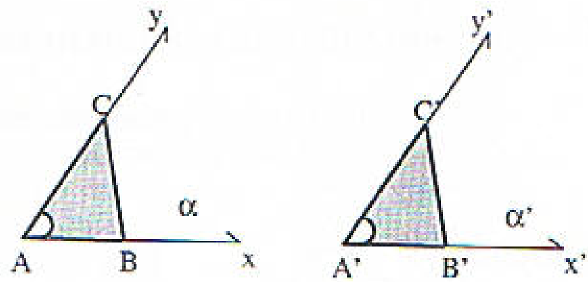
Tesis : $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$

Demostración

Llamaremos como sigue a las siguientes semirrectas : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Ax}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{Ay}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'x'}$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'y'}$ y a los semiplanos $\alpha = (AB,C)$ y $\alpha' = (A'B',C')$

Sea la isometría f determinada por las siguientes ternas,

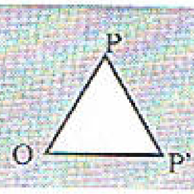
$(A, \overrightarrow{Ax}, \alpha) \xrightarrow{f} (A', \overrightarrow{A'x'}, \alpha')$



Si se aplica el teorema de transporte del segmento sobre la semirrecta $\overrightarrow{A'x'}$, se cumplirá que $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ * Así mismo por teorema de transporte del ángulo convexo se cumple que $f(x\widehat{A}y) = x'\widehat{A'}y'$ y nuevamente por T.T.S. sobre $\overrightarrow{A'y'}$ se tiene que $f(\overline{AC}) = \overline{A'C'}$ ** . En base a las dos afirmaciones señaladas con * y ** se puede afirmar que $f(A\widehat{B}C) = A'\widehat{B'}C'$ y en consecuencia ,por definición de congruencia $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$

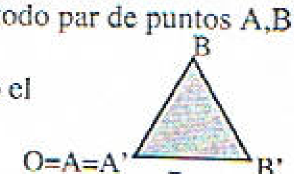
14.1 EJEMPLO

Dado un punto O fijo, se define la función biyectiva f, tal que f (O) = O y todo punto P distinto de O, tiene como imagen un punto P', tal que el triángulo OPP' resulta equilátero en sentido horario. Probar que f es una isometría.

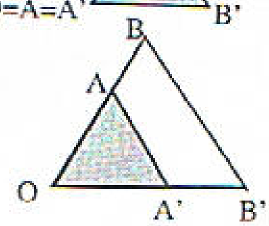


Se demostrará que f conserva las distancias, o sea que para todo par de puntos A,B se cumple que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

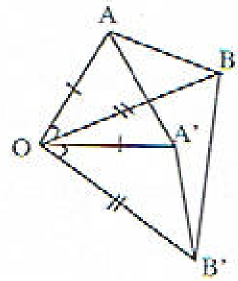
- Si A coincide con O, entonces A =A' por definición, y como el triángulo $O\widehat{B}B'$ es equilátero, se cumplirá que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$



- Si O, A y B están alineados, se cumplirá por ejemplo que $O \prec A \prec B$ y en consecuencia, que $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Como A' pertenece al segmento $\overline{OB'}$,(pues $A\widehat{O}A' = 60^{\circ}$, $B\widehat{O}B' = 60^{\circ}$ y $\overline{OA} = \overline{OB}$) entonces $\overline{OA'} + \overline{A'B'} = \overline{OB'}$, de donde $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'}$. Considerando que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y que $\overline{OB} = \overline{OB'}$ se concluye que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.



- Si O,A y B no están alineados, los triángulos $\widehat{OAB}$ y $\widehat{OA'B'}$ serán congruentes pues:
  1) $\overline{OA} = \overline{OA'}$ (por hipótesis)
  2) $\overline{OB} = \overline{OB'}$ (por hipótesis)
  3) $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} = 60° - \widehat{BOA'}$ (pues $\widehat{AOB} = \widehat{AOA'} - \widehat{BOA'}$ y $\widehat{A'OB'} = \widehat{BOB'} - \widehat{BOA'}$; considerando que los triángulos $\widehat{AOA'}$ y $\widehat{BOB'}$ son equiláteros se cumplirá que $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 60°$)

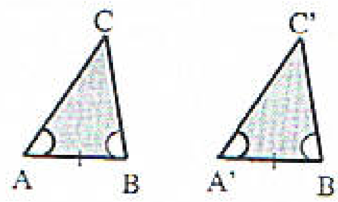


Si se aplica el criterio de congruencia L.A.L. los triángulos mencionados serán congruentes, y en particular serán iguales las medidas de sus lados correspondientes, o sea $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

Para cualquier otra posición de O,A y B, puede demostrarse la igualdad en forma análoga a las precedentes. Se concluye que como **f** es biyectiva y conserva las distancias, entonces es una isometría.

15. SEGUNDO CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS (A.L.A.)

Si dos triángulos tienen congruentes entre sí, dos ángulos y el lado comprendido, entonces son congruentes.

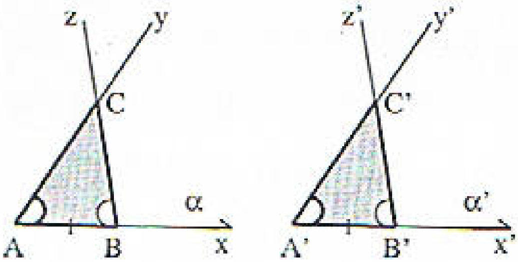


Hipótesis : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

Tesis : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

Demostración

Sea la isometría **f** determinada por las siguientes ternas correspondientes, (A, $\overrightarrow{Ax}$, α) $\xrightarrow{f}$ (A', $\overrightarrow{A'x'}$, α'). Si se aplica el teorema de transporte del segmento sobre la semirrecta $\overrightarrow{A'x'}$, resulta que
$f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ *



Aplicando el teorema de transporte del ángulo convexo, se puede afirmar que $f(\widehat{xAy}) = \widehat{x'A'y'}$ y también que $f(\widehat{xBz}) = \widehat{x'B'z'}$.
A la intersección de las semirrectas Ay y Bz ,(punto C) , le corresponderá en la isometría la intersección de sus imágenes $\overrightarrow{A'y'}$ y $\overrightarrow{B'z'}$,(punto C'), o sea que f (C) = C'

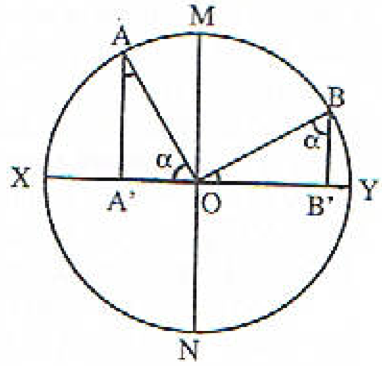
En base a esta última afirmación y la señalada con asterisco *, se concluye que $f(\widehat{ABC}) = \widehat{A'B'C'}$ y en consecuencia la congruencia de los triángulos .

15.1 EJEMPLO

Se considera una circunferencia de centro O, y dos diámetros perpendiculares $\overline{MN}$ y $\overline{XY}$. Se construye un ángulo recto $A\widehat{O}B$, con A y B pertenecientes a la circunferencia, y sean A' y B' sus proyecciones sobre XY, y P un punto del segmento $\overline{OY}$ tal que $\overline{XA'} = \overline{OP}$. Demostrar la congruencia de los siguientes triángulos:

1) $A\widehat{A'}O = O\widehat{B'}B$
2) $O\widehat{B'}N = A\widehat{A'}P$

1) Sea el ángulo $A\widehat{O}A' = \alpha$.

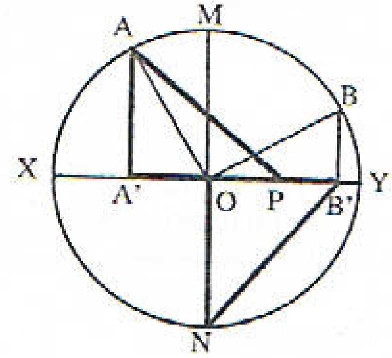


Los triángulos $A\widehat{A'}O$ y $O\widehat{B'}B$ serán congruentes pues:

- $\overline{OA} = \overline{OB}$, (radios)
- $A'\widehat{A}O = B'\widehat{O}B = 90^\circ-\alpha$, (ambos son complementarios de α pues $A\widehat{O}B = 90^\circ$ y $A\widehat{A'}O = 90^\circ$)
- $A\widehat{O}A' = O\widehat{B}B' = \alpha$, (pues $O\widehat{B}B'$ es complementario del $B\widehat{O}B' = 90^\circ-\alpha$)

En consecuencia si se aplica el criterio de congruencia de triángulos A.L.A., se deduce que $A\widehat{A'}O = O\widehat{B'}B$

2) Los triángulos $O\widehat{B'}N$ y $A\widehat{A'}P$, serán congruentes pues se cumple:



- $\overline{AA'} = \overline{OB'}$, (lados correspondientes en la congruencia de los triángulos demostrada en el punto anterior)
- $\overline{ON} = \overline{A'P}$, (ambos segmentos tienen la misma medida que el radio r, ya que como $\overline{XA'} + \overline{A'O} = r$ y por hipótesis $\overline{XA'} = \overline{OP}$ entonces se cumplirá que $\overline{A'P} = \overline{A'O} + \overline{OP} = r$)
- $A\widehat{A'}P = B'\widehat{O}N = 90^\circ$

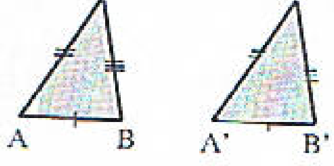
Por lo que, si se aplica el criterio de congruencia de triángulos L.A.L. se deduce que $O\widehat{B'}N = A\widehat{A'}P$.

16.- TERCER CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS (L.L.L.)

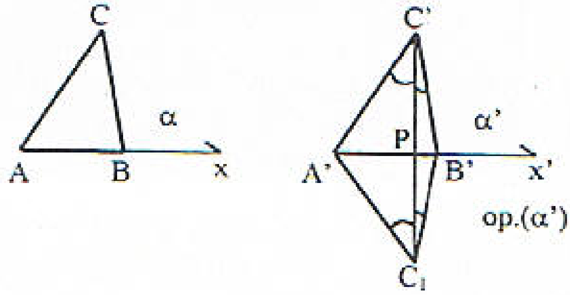
Si dos triángulos tienen todos sus lados congruentes entre si, entonces son congruentes.

<u>Hipótesis</u> : $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

<u>Tesis</u> : $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$



Demostración



Sea la isometría **f** definida por las siguientes ternas correspondientes :
$(A, \overrightarrow{Ax}, \alpha) \xrightarrow{f} (A', \overrightarrow{A'x'}, op.(\alpha'))$
Sea C_1 la imagen de C en la isometría. Como C_1 y C' están en semiplanos opuestos respecto de la recta A'B', se cumple que existe un punto P, tal que $\{P\}= \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overline{C'C_1}$ (axioma de partición del plano). Supongamos que $A' \prec P \prec B'$, los demás casos se demuestran en forma análoga.
Como $f(\overline{AC}) = \overline{A'C_1}$, entonces $\overline{AC} = \overline{A'C_1}$, y como por hipótesis se cumple que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, entonces aplicando la propiedad transitiva se tiene que $\overline{A'C_1} = \overline{A'C'}$ * .
Razonando igual se deduce que $\overline{B'C'} = \overline{B'C_1}$ **.

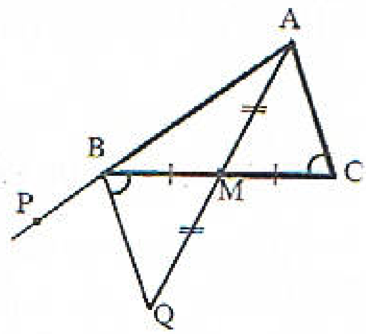
Se observa que los triángulos $\widehat{C'A'C_1}$ y $\widehat{C'B'C_1}$ son isósceles , por lo que son isoángulos, o sea que $A'\widehat{C'}C_1 = A'\widehat{C_1}C'$ y $B'\widehat{C'}C_1 = B'\widehat{C_1}C'$, y, efectuando la suma de los ángulos anteriores se cumple que $A'\widehat{C'}B' = A'\widehat{C_1}B'$ ***

En base a las tres afirmaciones señaladas con asterisco, y empleando el criterio de congruencia de triángulos L.A.L., se puede afirmar que $\widehat{A'B'C_1} = \widehat{A'B'C'}$, y como $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C_1}$ (pues se corresponden en la isometría f), por propiedad transitiva se cumplirá que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, como se quería demostrar.

17. TEOREMA DEL ANGULO EXTERNO

En todo triángulo, se cumple que cualquier ángulo externo, es mayor que los ángulos interiores no adyacentes a él.

Demostración

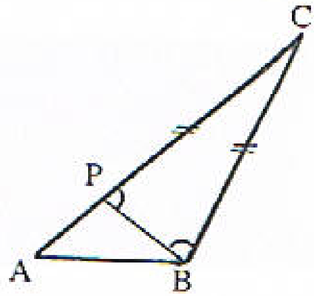


Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo cualquiera y $P\widehat{B}C$ uno de sus ángulos externos. Se demostrará que $P\widehat{B}C > A\widehat{C}B$. Sean M punto medio de $\overline{BC}$ y $Q \in \overrightarrow{AM}$ tal que $\overline{AM} = \overline{MQ}$, y $A \neq Q$.

Los triángulos $\widehat{AMC}$ y $\widehat{QMB}$ son congruentes, pues tienen dos lados congruentes, por construcción, y el ángulo opuesto por el vértice M, congruente, (criterio L.A.L.).
Se puede afirmar entonces la congruencia de sus ángulos correspondientes $A\widehat{C}M = Q\widehat{B}M$, y como $P\widehat{B}C > Q\widehat{B}M$, (es posible demostrar que $\overrightarrow{BQ}$ es rayo interior), entonces se cumplirá que $P\widehat{B}C > A\widehat{C}B$ como se quería demostrar.

Demuestre el lector, si lo cree necesario, en forma similar que $P\widehat{B}C > B\widehat{A}C$.

17.1 EJERCICIOS TEORICOS



1) Demostrar que en todo triángulo, se cumple que a mayor lado se opone mayor ángulo.

Sugerencia: considerar un punto $P \in \overline{AC}$, tal que $\overline{BC} = \overline{PC}$, y demostrar que $A\widehat{B}C > B\widehat{A}C$, aplicando el teorema del ángulo externo.

2) Demostrar el recíproco del ejercicio 1.

Sugerencia : iniciar la demostración por absurdo y aplicar el teorema directo.

18.- CUARTO CRITERIO DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS (L.L.A.)

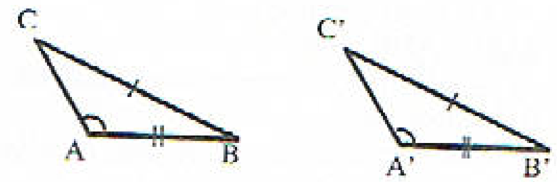
Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes, dos lados (desiguales entre ellos), y el ángulo opuesto al mayor de ellos; entonces son congruentes.

Hipótesis : $\overline{BC} > \overline{AB}$

$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

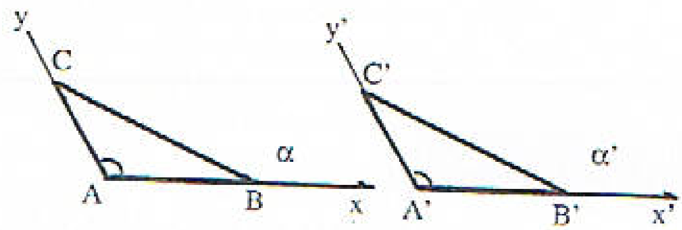
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$



Tesis : $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$

Demostración



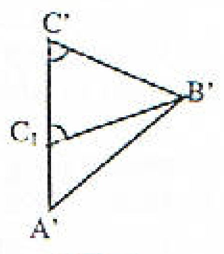
Sea f la isometría determinada por las siguientes ternas correspondientes :

$(A, \overrightarrow{Ax}, \alpha) \xrightarrow{f} (A', \overrightarrow{A'x'}, \alpha')$

Aplicando el teorema de transporte del segmento sobre $\overrightarrow{A'x'}$, se cumplirá que $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$. Así mismo si se aplica el teorema de transporte del ángulo convexo sobre α', se puede afirmar que $f(x\widehat{A}y) = x'\widehat{A'}y'$.

Sea C_1, la imagen de C en f. Si $C_1 = C'$, se cumple la tesis.

Supongamos por absurdo que $C_1 \neq C'$

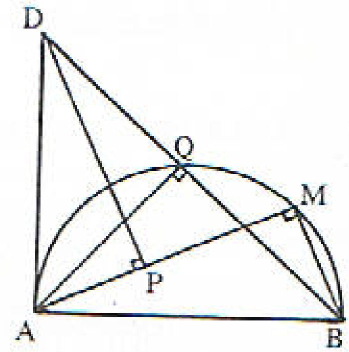


ABSURDO

En la isometría f , se cumple que $f(\overline{BC}) = \overline{B'C_1}$, o sea que $\overline{BC} = \overline{B'C_1}$, y por hipótesis que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, por lo que, aplicando la propiedad transitiva , se cumpliría que $\overline{B'C'} = \overline{B'C_1}$, de donde, el triángulo $C'B'C_1$ resulta isósceles (e isoángulo). Aplicando el teorema del ángulo externo en el triángulo $A'\widehat{B'}C_1$, se puede afirmar que $C'C_1B' > C'A'B'$; entonces como el $C'B'C_1$ es isoángulo, se cumpliría que $C_1\widehat{C'}B' > C'\widehat{A'}B'$, y como a mayor ángulo se opone mayor lado, también se cumple que $\overline{A'B'} > B'C'$, o sea que $\overline{AB} > \overline{BC}$, en contradicción con la hipótesis, por lo cual es absurdo suponer que $C_1 \neq C'$.

18.1 EJEMPLO

Sea $\mathscr{C}$ una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y M un punto cualquiera de ella. Sobre $\overline{AM}$ se considera un punto P tal que $\overline{AP} = \overline{BM}$. Por P se traza la perpendicular a la recta AM que corta en D a la tangente a $\mathscr{C}$ trazada por A. Sea el punto Q la intersección de $\mathscr{C}$ con la recta BD. Demostrar la congruencia de los siguientes triángulos: 1) $\overset{\triangle}{DPA} = \overset{\triangle}{AMB}$ 2) $\overset{\triangle}{ABQ} = \overset{\triangle}{ADQ}$



1) Considerando que:
- $\overline{AP} = \overline{BM}$ (por hipótesis)
- $\widehat{AMB} = \widehat{APD} = 90°$
- $\widehat{DAP} = \widehat{ABM} = 90° - \widehat{PAB}$ (ambos ángulos complementarios del $\widehat{PAB}$),

y aplicando el criterio de congruencia de triángulos A.L.A. se cumple que $\overset{\triangle}{DPA} = \overset{\triangle}{AMB}$

2) Considerando que:
- $\widehat{AQB} = \widehat{AQD} = 90°$
- $\overline{AD} = \overline{AB}$ (lados correspondientes de los triángulos congruentes de la parte1)
- $\overline{AQ}$ lado común

y aplicando el criterio de congruencia de triángulos L.L.A. (obsérvese que la hipotenusa es mayor que el cateto) se puede afirmar que $\overset{\triangle}{ABQ} = \overset{\triangle}{ADQ}$

19. EJERCICIOS

1) Dado un punto O, se considera una función biyectiva **f**, tal que f (O) = O, y todo punto P distinto de O , tiene como imagen un punto P', tal que O es punto medio de $\overline{PP'}$. Probar que **f** es una isometría.
2) Dado un punto O, se considera una función biyectiva **h**, tal que h (O) =O, y todo punto P distinto de O, tiene como imagen un punto P', tal que $\overset{\triangle}{OPP'}$ resulta un triángulo rectángulo en O, e isósceles en sentido horario. Probar que **h** es una isometría.
3) Dado un punto O, se considera la función **g**, tal que g (O) = O, y todo punto distinto de O, tiene como imagen un punto $P' \in \overrightarrow{OP}$, tal que $\overline{OP'} = \overline{OP} + 3$. Probar que **g** no es una función biyectiva de π en π.
4) Dado un triángulo ABC equilátero, se consideran las siguientes seis isometrías que lo dejan globalmente invariante :

f	g	h	i	j	k
$A \to A$	$A \to C$	$A \to B$	$A \to A$	$A \to C$	$A \to B$
$B \to C$	$B \to B$	$B \to A$	$B \to B$	$B \to A$	$B \to C$
$C \to B$	$C \to A$	$C \to C$	$C \to C$	$C \to B$	$C \to A$

Se considera el conjunto W = { f, g, h, i, j, k }

a) Construir la tabla correspondiente a (W, $\circ$)

b) Hallar la función inversa de cada elemento de W

c) Verificar la existencia del neutro y compruebe con un ejemplo que se cumple la propiedad asociativa.

d) Demuestre con un ejemplo que (W, $\circ$) no es un grupo conmutativo.

5) Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$, se considera un punto O perteneciente a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ e interior al triángulo, Sean $\{C_1\} = \overline{BO} \cap AC$, $\{B_1\} = \overline{CO} \cap AB$, $\{M\} = BC \cap mz$, $\{P\} = B_1C_1 \cap mz$
Demostrar que a) $O\widehat{M}C = O\widehat{M}B$ b) $O\widehat{B}P = O\widehat{C}P$ c) $B_1\widehat{B}C = C_1\widehat{C}B$

6) Dado un cuadrado ABCD antihorario, se considera $N \in \overline{AD}$. Por C se traza la perpendicular a NC que corta a AB en M . Probar que $N\widehat{D}C = C\widehat{B}M$.

7) Se considera un triángulo equilátero $\widehat{ABC}$ de centro O. Sean $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{AC}$, tal que $\overline{AN} = \overline{BM}$. Probar que $O\widehat{B}M = O\widehat{A}N$.

8) Sea una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, y M el punto medio del arco AB. Se trazan dos radios perpendiculares $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$; y por C y D se trazan rectas perpendiculares a AB, que la cortan en C_1 y D_1.
Demostrar que : a) $C\widehat{O}D = M\widehat{O}B$ b) $O\widehat{C}C_1 = O\widehat{D}D_1$

9) Sean $\widehat{ABC}$ y $A'\widehat{B'}C'$ dos triángulos tales que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ y las medianas comprendidas entre los lados congruentes iguales ($\overline{AM} = \overline{A'M'}$)
Sean D y D' dos puntos tales que M y M' son puntos medios de $\overline{AD}$ Y $\overline{A'D'}$
Probar que : a) $A\widehat{B}M = D\widehat{M}C$ b) $A\widehat{D}C = A'\widehat{D'}C'$ c) $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$

10) Sea ABCD un cuadrado y F,E y G puntos interiores tal que $E\widehat{C}D = E\widehat{D}C = 15°$ $G\widehat{B}C = G\widehat{C}B = 15°$ y $F\widehat{A}D = F\widehat{D}A = 15°$
Probar que : a) $F\widehat{D}E = G\widehat{C}E$, equiláteros b) $A\widehat{E}B$ es equilátero.

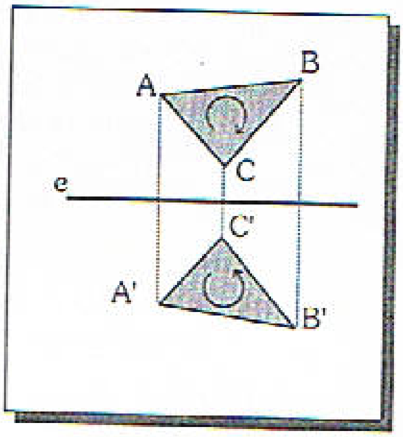
11) Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O, se trazan las tangentes a ella, siendo A y B los puntos de tangencia .Probar que $\overline{PA} = \overline{PB}$

12) En un triángulo escaleno $\widehat{ABC}$,se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A\widehat{B}C'$,$B\widehat{C}A'$ y $C\widehat{A}B'$. Demostrar que $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

13) Sobre los lados de un paralelogramo ABCD, se construyen cuadrados exteriores a él. ¿Qué figura determinan los centros M, N, P y Q de dichos cuadrados? Justifique

CAPITULO 3

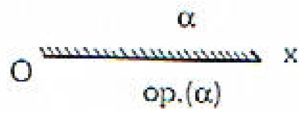
SIMETRIA AXIAL



1. DEFINICIÓN

Se denomina simetría axial de eje (e), que se anotará $\mathbf{S_e}$ a la isometría determinada por las siguientes ternas correspondientes:

$$\boxed{\mathbf{S_e} : \pi \rightarrow \pi \ / \ (O, \overleftarrow{Ox}, \alpha) \xrightarrow{\mathbf{S_e}} (O, \overleftarrow{Ox}, op.(\alpha))}$$



Observaciones

- La semirrecta $\overleftarrow{Ox}$ de la definición esta incluida en el eje (e).
- La simetría axial es una isometría indirecta.

2. ISOMETRIA INVOLUTIVA

2.1 Definición

Decimos que una isometría es involutiva, si compuesta con ella misma da como resultado la identidad.

$$\mathbf{f} \text{ es involutiva } \Leftrightarrow f \circ f = I$$

Observación

Como toda isometría compuesta con su inversa da como resultado la identidad, o sea que, $f \circ f^{-1} = I$, y por definición se cumple que $f \circ f = I$, se deduce que si f es involutiva, entonces $f = f^{-1}$.

2.2 Propiedad

La simetría axial es una isometría involutiva

Demostración

Observemos las transformaciones de la terna $(O, \overleftarrow{Ox}, \alpha)$, en la composición $S_e \circ S_e$:

$$\begin{array}{ccccc} O & \xrightarrow{S_e} & O & \xrightarrow{S_e} & O \\ \overleftarrow{Ox} & \longrightarrow & \overleftarrow{Ox} & \longrightarrow & \overleftarrow{Ox} \\ \alpha & \longrightarrow & op.(\alpha) & \longrightarrow & op.(op.(\alpha)) \end{array}$$

Como $op.(op.(\alpha)) = \alpha$ se cumple que la composición $S_e \circ S_e = I$, pues realiza las mismas transformaciones : $(O, \overleftarrow{Ox}, \alpha) \rightarrow (O, \overleftarrow{Ox}, \alpha)$

3. IMAGENES DE RECTAS

3.1 Recta unida

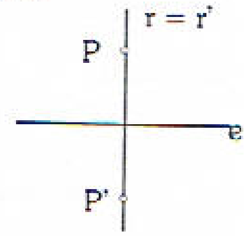
El eje de la simetría axial es unido.

Demostración

Toda isometría con dos puntos unidos, deja unida a la recta que ellos determinan. Como $\overleftarrow{Ox}$ permanece unida (probarlo) y $\overleftarrow{Ox} \subset e$ entonces (e) es unida.

3.2 Rectas dobles

Las rectas determinadas por puntos simétricos son dobles .



Demostración

Sea un punto P y su imagen P' en la simetría Se.
Como la simetría axial es involutiva, entonces Se(P)=P' y Se(P')=P, por lo cual Se(PP')=P'P.
Si PP'= r y P'P= r' , es obvio que r= r', pues dos puntos determinan una sola recta, de donde resulta la tesis.

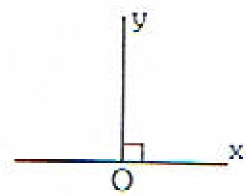
4.- PERPENDICULARIDAD

4.1. Ángulo recto

Definición

Un ángulo convexo es recto si es congruente con uno de sus ángulos adyacentes.

Notación: $x\widehat{O}y = 1R$ o $x\widehat{O}y = 90°$.



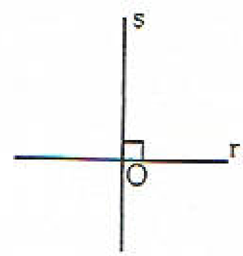
4.2 Rectas perpendiculares

Definición

Dos rectas son perpendiculares si determinan un ángulo recto $r \perp s \Leftrightarrow r\widehat{O}s = 1R$.

Observación

Si $r \perp s \Rightarrow s \perp r$

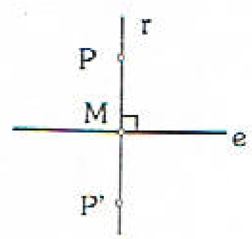


4.3 Rectas perpendiculares al eje

Definición

Las rectas determinadas por puntos simétricos son perpendiculares al eje.

Hipótesis $S_e(P)=P'$, $PP' \equiv r$ Tesis $r \perp e$



Demostración

Sea $r \cap e = \{M\}$. Como S_e transforma a $P \rightarrow P'$, $M \rightarrow M$ y $e \rightarrow e$

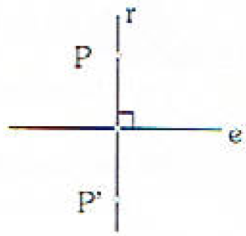
Podemos afirmar que $\widehat{PMe} \to \widehat{P'Me}$ de donde $\widehat{PMe}=\widehat{P'Me}$. Al ser $\widehat{PMe}$ congruente con un adyacente; es recto y por lo tanto $r \perp e$.
Corolario: Las rectas perpendiculares al eje son dobles.

4.4 EJERCICIO TEÓRICO

1) Demostrar que la perpendicularidad se conserva en las isometrías.
2) Probar que las rectas paralelas al eje tienen imágenes paralelas a él.

4.5 Existencia y unicidad de la perpendicular

Existe y es única, la recta (r), perpendicular a una recta dada (e), por un punto dado P.



Demostración

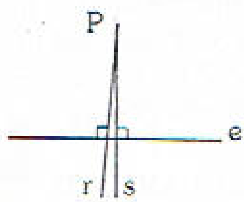
Si $P \notin e$

Existencia

Sea $P' = S_e(P)$ y $PP' \equiv r$, entonces por el teorema anterior se cumplirá que $r \perp e$.

Unicidad

Supongamos por absurdo que existen dos rectas distintas (r) y (s) perpendiculares a (e) por P.



Si $r \perp e$ entonces $S_e(r) = r$

Si $s \perp e$ entonces $S_e(s) = s$

Si $P' = S_e(P)$ entonces $P' \in r$ y $P' \in s$, de donde $PP' \equiv s$ o sea $r = s$ contra lo supuesto.

ABSURDO

En consecuencia la perpendicular (r) es única.

Si $P \in e$

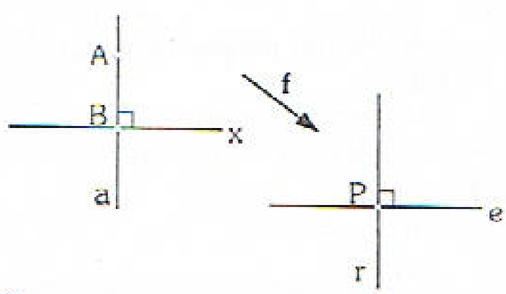
Existencia

Sea una recta (x) cualquiera y un punto exterior A. Por A existe y es única la recta (a) perpendicular a (x). Sea $\{B\} = a \cap x$ entonces $\widehat{ABx} = 1R$. Consideremos la isometría **f** definida por las siguientes transformaciones:

$(B, \overline{Bx}, (x,A)) \to (P, \overline{Pe}, \alpha)$ con α de borde e.

Sea $\overline{Pr} = f(\overline{BA})$

Como $\widehat{aBx}$ es recto entonces $\widehat{rPe} = 1\widehat{R}$ y $r \perp e$.



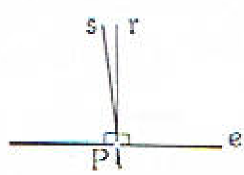
Unicidad

Supongamos por absurdo que existen dos rectas distintas (r) y (t) perpendiculares a (e) por P.

Como $e \perp r$ entonces podemos afirmar que en la simetría axial **Sr** ocurren las siguientes transformaciones :

$P \to P$, $\overline{Pe} \to op.(\overline{Pe})$ y $\alpha \to \alpha$

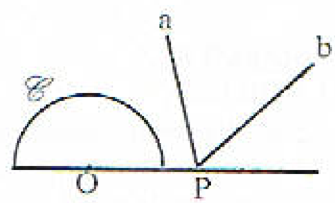
con α semiplano de borde e .



Y como $e \perp t$ en la simetría axial S_t se cumplirá que
$P \to P$, $\overleftarrow{Pe} \to op(\overleftarrow{Pe})$ y $\alpha \to \alpha$.
Por axioma la isometría que realiza estas transformaciones es única.
Entonces $S_r = S_t$ y $r = t$ contra lo supuesto.
En conclusión la perpendicular (r) a (e) por P es única.

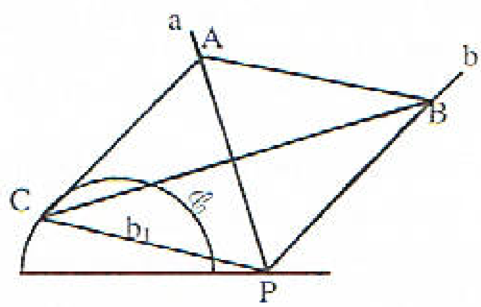
5 . EJEMPLO

Sea una semicfa. $\mathscr{C}$ de centro O y un punto P alineado con el diámetro de la misma. Se consideran dos semirrectas $\overleftarrow{Pa}$ y $\overleftarrow{Pb}$ en un mismo semiplano de borde (OP) con $a\hat{P}b$ horario.
Construir un rombo (PCAB) con C perteneciente a $\mathscr{C}$, A perteneciente a $\overleftarrow{Pa}$ y B a $\overleftarrow{Pb}$.



En primer lugar efectuamos una figura de análisis en la que se supone resuelto el problema, para intentar deducir las propiedades que cumpliría la solución. Para ello, a partir de un rombo cualquiera, ubicamos los datos del problema.

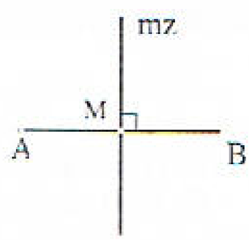
Como en el rombo, la recta que contiene cada diagonal, es mediatriz de la otra diagonal, se puede afirmar que B y C son simétricos respecto del eje (a), entonces en S_a se cumple que $\overleftarrow{PB} \to \overleftarrow{PC}$. Además como $C \in \mathscr{C}$, dicho punto se puede determinar como la intersección de la semirrecta simétrica de $\overleftarrow{Pb}$ y la semicircunferencia; pudiendo existir una, dos, o ninguna solución, según esta semirrecta sea tangente, secante o exterior a $\mathscr{C}$



Construcción

1) Se construye la semirrecta $\overleftarrow{Pb_1}$, simétrica de $\overleftarrow{Pb}$ respecto del eje (a).
2) Se hallan los posibles puntos C, tal que $C = \mathscr{C} \cap \overleftarrow{Pb_1}$.
3) Se construye B, simétrico de C respecto del eje (a).
4) Se ubica $A \in \overleftarrow{Pa}$ tal que $\overline{BA} = \overline{BP}$

6. MEDIATRIZ



6.1 Definición

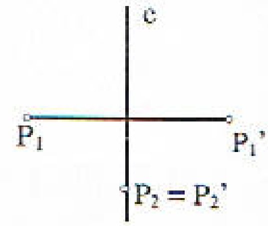
Se denomina mediatriz de un segmento , a la recta perpendicular a éste, por su punto medio

6.2 Existencia y unicidad

La mediatriz existe y es única, pues existen y son únicos el punto medio del segmento y la perpendicular a éste por dicho punto.

7. CONCLUSION IMPORTANTE

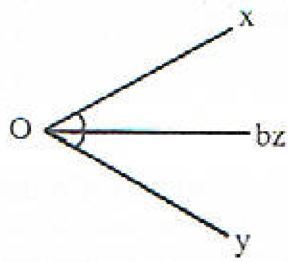
☆ Dada una recta (e), se cumple que la isometría que hace corresponder a cada punto P del plano, un punto P' tal que si
$P \in e \Rightarrow P = P'$ y si $P \notin e \Rightarrow e = mz(\overline{AB})$;
es la simetría axial de eje (e); S_e .



8. BISECTRIZ

8.1 Definición

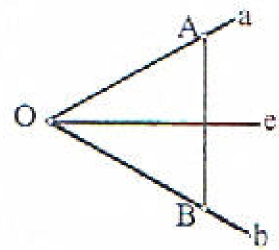
Se denomina bisectriz de un ángulo convexo, a la semirrecta interior, con origen en el vértice del ángulo y que determina con los lados; ángulos congruentes entre sí.
Notación : bz $(x\widehat{O}y)$



8.2 Existencia y unicidad

Sean dos puntos A y B pertenecientes a los lados tal que $\overline{OA}=\overline{OB}$ y sea (e) la mediatriz de $\overline{AB}$ obsérvese que $O \in e$.

La simetría axial de eje e transforma $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$ y $\overline{OB}$ en $\overline{OA}$ entonces
$a\widehat{O}e = S_e(b\widehat{O}e)$, por lo cual $a\widehat{O}e = b\widehat{O}e$ y $\overline{Oe}$ es bz. del $a\widehat{O}b$. La existencia y unicidad de la isometría S_e (axioma de isometría) implica la existencia y unicidad de la bisectriz.

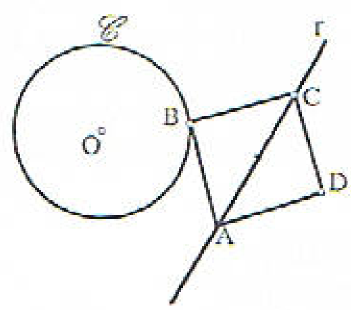


Corolario

En la simetría axial, el eje incluye la bisectriz del ángulo determinado por una semirrecta con origen en el eje y su imagen.

9. EJEMPLO

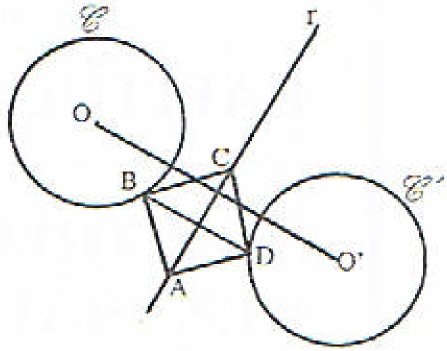
Se consideran una cfa. $\mathscr{C}$ y una recta (r) exterior. Se construyen los cuadrados ABCD con B perteneciente a $\mathscr{C}$ y $\overline{AC}$ incluido en (r). Hallar el lugar geométrico de D al variar B en la circunferencia.



Por ser ABCD un cuadrado, se cumple que (r) es mediatriz de la diagonal $\overline{BD}$, por lo que, B y D se corresponden en una simetría de eje (r).

Como B varía en $\mathscr{C}$ se cumplirá que D variará en la circunferencia $\mathscr{C}'$, simétrica de la primera. Para hallarla, se simetriza el centro, y, al conservarse las distancias el radio será el mismo.
Se puede afirmar entonces, que

todo punto $B \in \mathscr{C}$ tiene una imagen $D \in \mathscr{C}'$. Así mismo todo punto de $\mathscr{C}'$ tiene una preimágen en $\mathscr{C}$, pues basta aplicar la isometría inversa (en este caso la misma simetría axial), que transforma D en B, de donde, se concluye, que el lugar geométrico de D es la circunferencia $\mathscr{C}'$ tal que $\mathscr{C}' = S_r(\mathscr{C})$

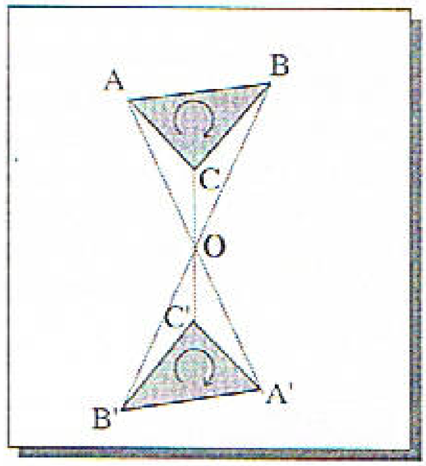


10. EJERCICIOS

1) Construya un triángulo equilátero $\widehat{ABO}$ en sentido horario. Sean (r) la mediatriz de $\overline{AB}$ y (t) la perpendicular a (r), por O .
   a) Construir $S_t(\widehat{ABO})=\widehat{EDO}$
   b) Construir $\widehat{AFE}$ tal que $S_{AE}(\widehat{AEO})=\widehat{AEF}$
   c) Construir $\widehat{BDC}$ tal que $S_{BD}(\widehat{BDO})=\widehat{BDC}$
   d) Justifique que: $S_r(\widehat{BCD})=\widehat{AFE}$
   e) Justifique la naturaleza del polígono (ABCDEF)
2) Dadas dos semirrectas paralelas $\overrightarrow{Ax}$ y $\overrightarrow{Oy}$, con $\widehat{OAx}$ agudo se construyen los rombos (ABCD) tal que $B \in \overrightarrow{Oy}$ y $C \in \overrightarrow{Ax}$. Lugar geométrico de D al variar B en $\overrightarrow{Oy}$.
3) Construir un cuadrilátero (ABCD) conociendo la medida de los 4 lados y sabiendo que la diagonal $\overline{AC}$ es bisectriz del $\widehat{BAD}$.
   Sugerencia: Considere la S_{AC}.
4) Se da una circunferencia $\mathscr{C}$ y dos rectas (a) y (b) exteriores. Construir un cuadrado (ABCD) con $B \in b$, $D \in \mathscr{C}$ y $\overline{AC}$ incluido en (a).
5) Dadas 3 rectas secantes dos a dos, (a), (b) y (m). Construir un segmento $\overline{AB}$ con $A \in a$, $B \in b$ y tal que (m) sea mediatriz de $\overline{AB}$.
6) En una cfa. $\mathscr{C}$ se considera un punto fijo T y la tangente (t) a la cfa. en T. Sea $A \in \mathscr{C}$ variable. Se construyen los rombos ABCT con la diagonal $\overline{BT}$ incluida en (t). Lugar geométrico de C al variar A.
7) Dada una recta (x) y dos puntos P y Q situados en distinto semiplano respecto de (x) , hallar $A \in x$ tal que la semirrecta $\overrightarrow{Ax}$ sea bisectriz de ángulo $\widehat{PAQ}$.
8) Sean una recta (r) y dos puntos A y B situados en un mismo semiplano de borde (r). Sea $C = S_r(B)$ y $AC \cap r = \{X\}$. Demuestre que dado cualquier punto $P \in r$, $P \neq X$, se cumple que $\overline{AX}+\overline{XB}<\overline{AP}+\overline{PB}$.
9) Construir un triángulo ABC conociendo el lado $\overline{AB}$, el ángulo $\widehat{A}$ y el perímetro del triángulo.
10) Probar que en todo triángulo isósceles, la suma de distancias de un punto interior de la base a los lados es constante.
    Sugerencia: Considere la simetría del eje que incluye la base.
11) Probar que en todo triángulo equilátero la suma de distancias de un punto interior del triángulo a los lados es cte. Sugerencia.: Aplique el ej. anterior.

CAPITULO 4

SIMETRIA CENTRAL

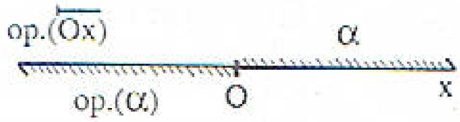


1. DEFINICIÓN

Se denomina simetría central de centro O, que se anotará C_O, a la isometría determinada por las siguientes ternas correspondientes :

$$C_O : \pi \to \pi \ / \ (O, \overline{Ox}, \alpha) \xrightarrow{C_O} (O, op.(\overline{Ox}), op.(\alpha))$$

- La simetría central es una isometría directa
- El centro es el único punto unido.



2. EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la simetría central es una isometría involutiva.

3. IMAGENES DE RECTAS

3.1 Rectas que contienen al centro de simetría

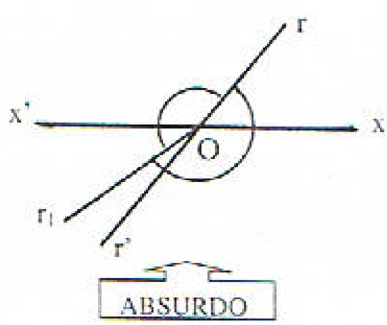
Toda semirrecta con origen en el centro de simetría , se transforma en su opuesta .

Hipótesis: $C_O(\overline{Or}) = (\overline{Or_1})$ $\quad op.(\overline{Or}) = \overline{Or'}$ $\qquad$ Tesis : $\overline{Or'} = \overline{Or_1}$

Demostración

Supongamos por absurdo que la semirrecta opuesta de $\overline{Or}$ no es la imagen de $\overline{Or}$ en la simetría, o sea $\overline{Or'} \neq \overline{Or_1}$. Sea por ejemplo el siguiente orden en las semirrectas $\overline{Or} \prec \overline{Or_1} \prec \overline{Or'}$, en sentido antihorario.

Como la simetría central es una isometría involutiva directa , se cumplirá



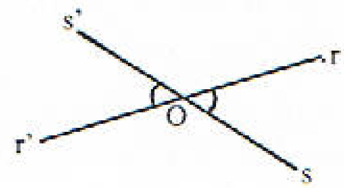
que si $\overrightarrow{Or} \rightarrow \overrightarrow{Or_1}$ entonces $\overrightarrow{Or_1} \rightarrow \overrightarrow{Or}$, de donde , el ángulo $r\widehat{O}r_1$ se transformará en el $r_1\widehat{O}r$, resultando en consecuencia que dichos ángulos son congruentes: $\underline{r\widehat{O}r_1 = r_1\widehat{O}r}$ * (se consideran estos ángulos en un mismo sentido).

Como $\overrightarrow{Or_1}$ es rayo interior en $r\widehat{O}r'$, se cumple que $r\widehat{O}r_1 < r\widehat{O}r'$, y como $\overrightarrow{Or'}$ es rayo interior, en $r_1\widehat{O}r$, entonces $r'\widehat{O}r < r_1\widehat{O}r$. Considerando que $r'\widehat{O}r = r\widehat{O}r'$ pues ambos ángulos son llanos y aplicando la propiedad transitiva, se cumplirá $\underline{r\widehat{O}r_1 < r_1\widehat{O}r}$, lo cual es contradictorio con la afirmación inicial señalada anteriormente con *.

Se concluye que es absurdo suponer que $\overrightarrow{Or_1}$ sea distinta de $\overrightarrow{Or'}$.

Corolarios

- Los ángulos opuestos por el vértice ,son congruentes. $\Longrightarrow$



- Toda recta que pase por el centro de simetría es doble, pero no unida $\Longrightarrow$

3.2 Rectas que no contienen al centro

Toda recta a la cual no pertenece el centro de simetría, tiene por imagen una recta paralela disjunta.

Hipótesis : $C_O(r) = r'$, $O \notin r$ Tesis : $r \parallel r'$, $r \cap r' = \emptyset$

Demostración

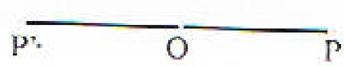
Supongamos por absurdo que las rectas (r) y (r') tienen un punto en común P. Sea la recta $x = OP$. Como dicha recta contiene al centro, ésta será doble en la simetría central C_O, y el punto P tendrá como imagen un punto P', que resultara alineado con O y P. Considerando que $\{P'\} = r' \cap r$ y que dos puntos determinan una sola recta, entonces, $r = r' = x$, y como $O \in x$, también se cumplirá que $O \in r$, en contradicción con la hipótesis, de donde, es absurdo suponer que (r) y (r') tengan puntos comunes, concluyéndose la tesis.

3.3 El centro de simetría como punto medio

El centro de simetría es el punto medio del segmento determinado por puntos correspondientes.

Demostración

Como $O \rightarrow O$ y $P \rightarrow P'$, se cumplirá que el segmento $\overline{OP}$ se transformará en el $\overline{OP'}$ de donde dichos segmentos serán congruentes: $\overline{OP} = \overline{OP'}$.



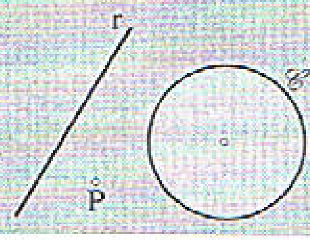
Además como P,O, y P' están alineados, con el punto O entre P y P' , se concluye que O es punto medio de $\overline{PP'}$.

5.☆ CONCLUSIÓN IMPORTANTE

Dado un punto O, la isometría que hace corresponder al punto O, a sí mismo, y a todo otro punto P del plano , un punto P', tal que O sea el punto medio de $\overline{PP'}$, es la simetría central de centro O; C_O.

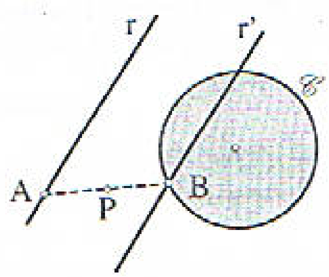
6. EJEMPLO

Se consideran el punto P, la recta (r) y la cfa. $\mathscr{C}$ de la figura. Construir un segmento $\overline{AB}$, con A perteneciente a (r), B perteneciente a $\mathscr{C}$ y P punto medio de $\overline{AB}$.



A partir de un segmento cualquiera $\overline{AB}$ y su punto medio P, se construye una figura de análisis, en la cual ubicamos $\mathscr{C}$ y (r).

Como P es punto medio de $\overline{AB}$, se cumple que a $B = C_P(A)$,de donde,B pertenecerá a la recta (r') simétrica de (r) respecto de P. Considerando además que $B \in \mathscr{C}$ se puede hallar dicho punto como la intersección de (r') con $\mathscr{C}$.



Construcción

1. Se simetriza (r) respecto de P (basta simetrizar dos puntos de (r)).
2. Se hallan los posibles puntos B tal que $B = r' \cap \mathscr{C}$.
3. Se construye el punto A simétrico de B respecto de P.

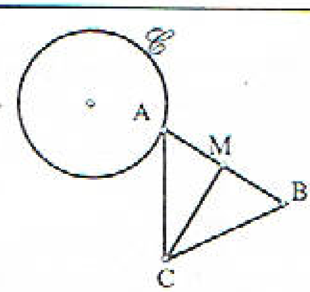
- El problema también se hubiese podido resolver hallando la intersección de la circunferencia simétrica de $\mathscr{C}$ respecto de P, con (r).

7. EJEMPLO

Dada una cfa. $\mathscr{C}$ y un segmento $\overline{MC}$ exterior se consideran los triángulos $\widehat{ABC}$, con A perteneciente a $\mathscr{C}$ y $\overline{MC}$ mediana.

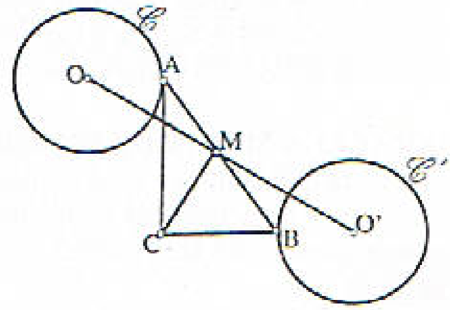
a) Hallar el L.G. de B al variar A en la circunferencia ..

b) Construir un triángulo de la familia que cumpla que $\widehat{MBC}=60°$.



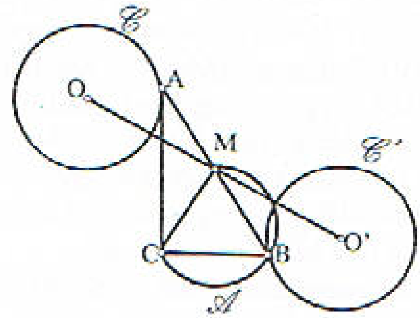
Solución

a) Como $\overline{MC}$ es mediana, entonces M es punto medio de $\overline{AB}$, de donde podemos afirmar que A y B son simétricos respecto de M, y por consiguiente B variará en la cfa. $\mathscr{C}'$ simétrica de $\mathscr{C}$.



Considerando que todo punto de $\mathscr{C}'$ tiene una preimagen en $\mathscr{C}$, aplicando la isometría inversa de la simetría (en este caso es la misma simetría central), concluimos que el lugar geométrico de B es la cfa. $\mathscr{C}'$ siendo $\mathscr{C}' = C_M(\mathscr{C})$.

b) Si $\widehat{MBC}=60°$, entonces B pertenece al arco capaz de segmento $\overline{MC}$ y ángulo 60°.
Como $B \in \mathscr{C}'$, se puede hallar dicho punto construyendo la intersección de el arco con la circunferencia $\mathscr{C}'$.



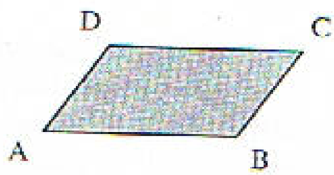
Construcción

1) Se construye $\mathscr{C}'$ simétrica de $\mathscr{C}$ respecto de M.
2) Se construye $\mathscr{A}$, arco capaz de segmento $\overline{MC}$ y 60°.
3) Se hallan los posibles B tal que $B = \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$.
4) Se simetriza B respecto de M obteniéndose A.

8. PARALELOGRAMOS

8.1 Definición

Se denomina paralelogramo a todo cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.

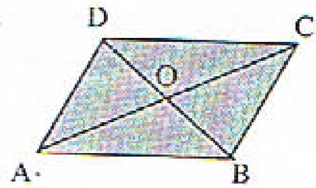


8.2 Centro de simetría de una figura

Decimos que una figura $\mathscr{F}$ admite centro de simetría O, si y sólo si, $C_O(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.

8.3 EJERCICIOS TEÓRICOS

1) Demostrar que todo paralelogramo admite como centro de simetría, al punto medio de las diagonales.



2) Es condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo, que los dos pares de lados opuestos sean congruentes .

3) Es condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo, que un par de lados sean congruentes y paralelos.

9. PARALELA MEDIA DE UN TRIANGULO

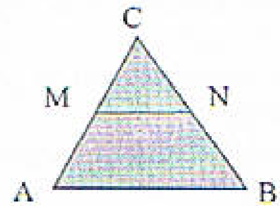
La recta que contiene a los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado; y la medida del segmento que determinan dichos puntos, es igual a la mitad de la medida del lado paralelo.

Hipótesis

M punto medio de $\overline{AC}$, N punto medio de $\overline{BC}$

Tesis

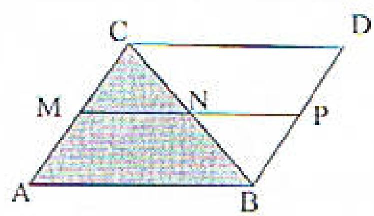
$MN \parallel AB$ y $\overline{AB}=2\overline{MN}$



Demostración

Sean $D = C_N(A)$ y $P = C_N(M)$. Como M es punto medio de $\overline{AC}$; P será punto medio de su imagen $\overline{DB}$. Entonces $\overline{AM}=\overline{BP}$ y $AM \parallel BP$ (pues ABDC es paralelogramo), por lo que; el cuadrilátero (MABP) es también un paralelogramo, por tener dos lados opuestos paralelos y congruentes.

Se deduce que $MP \parallel AB$; de donde, $MN \parallel AB$ y como $2\overline{MN}=\overline{MP}$ y $\overline{MP}=\overline{AB}$ entonces $2\overline{MN}=\overline{AB}$.



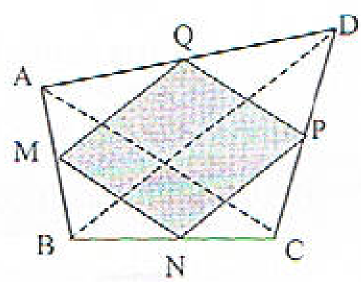
10. EJEMPLO

Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.

Sean M N,P y Q puntos medios del cuadrilátero (ABCD) de la figura.

Como MN es paralela media en el triángulo $\widehat{ABC}$, se cumplirá que $MN \parallel AC$. Además como QP es paralela media en el triángulo $\widehat{ACD}$ resultará que $QP \parallel AC$, y aplicando transitiva se puede afirmar que $QP \parallel MN$.

Razonando análogamente en los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BDC}$ se llega a la conclusión de que $MQ \parallel NP$ resultando en consecuencia que el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

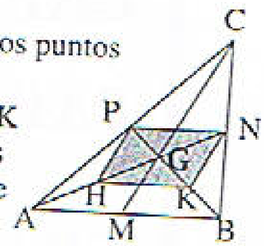


11. PROPIEDAD DEL BARICENTRO

Las tres medianas de todo triángulo $\widehat{ABC}$, se cortan en un punto G, llamado baricentro, y tal que el segmento de cada mediana, determinado por el baricentro y el punto medio es un tercio de la misma.

Demostración

Sea G ,el punto de intersección de las medianas $\overline{AN}$ y $\overline{BP}$, y H y K los puntos medios de $\overline{AG}$ y $\overline{BG}$. Como NP y HK son paralelas medias en los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABG}$ respectivamente , se cumplirá que NP $\parallel$ HK y que $\overline{NP} = \overline{HK}$, por lo cual se deduce que el cuadrilátero HKNP es un paralelogramo. El punto G es el centro del paralelogramo, ya que es el punto de corte de las diagonales, entonces se cumplirá que $\overline{GN} = \overline{HG} = \overline{AH}$ y $\overline{PG} = \overline{GK} = \overline{KB}$, lo cual demuestra el teorema, pues la tercer mediana tiene que dividir a éstas de igual modo, determinando el único punto G, tal que $\overline{PG} = 1/3\ \overline{BP}$ y $\overline{NG} = 1/3\ \overline{AN}$ (axioma métrico).

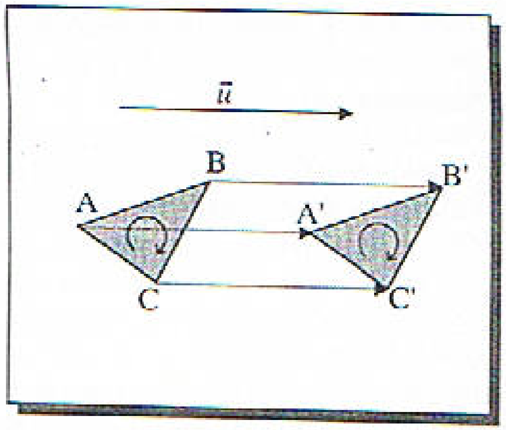


12. EJERCICIOS

1. Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ conociendo los puntos medios de los lados; M, N y P
2. Dado un ángulo $x\widehat{O}y$, y un punto M interior. Construir un segmento $\overline{AB}$ de modo que $A\in \overline{Ox}$, $B\in \overline{Oy}$ y M punto medio de $\overline{AB}$.
3. Dado dos puntos A y O en un mismo semiplano respecto de una recta (r)
   a) Construir un paralelogramo (ABCD) de centro O y $B\in r$.
   b) L.G. del punto D al variar B en (r).
   c) Construir un paralelogramo de la familia tal que $A\widehat{D}C=60°$. Discuta nº de soluc.
4. Sea $\mathscr{C}$ una cfa. y A un punto fijo de ella. Se consideran los diámetros variables $\overline{BC}$. Se construyen los triángulos $\widehat{BCD}$ isósceles, $\overline{BC}=\overline{BD}$ con $A\in \overline{CD}$. Hallar el lugar geométrico de D.
5. Dadas dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ secantes M y N, de distinto radio, trazar por M una recta que determine cuerdas congruentes en ambas cfas.
6. Dado el triángulo $\widehat{ABC}$ isósceles con $\overline{AB}=\overline{BC}$, M punto medio de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ y P de $\overline{AC}$. Demostrar que MBNP es un rombo.
7. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo cualquiera y $\overline{MC}$, $\overline{NA}$ y $\overline{PB}$ medianas. Sea G el baricentro. Se considera el punto R, tal que $R = C_N(G)$
   a) Probar que BGCR es un paralelogramo de centro N.
   b) Probar que $\overline{BR}=2/3\overline{MC}$ y $\overline{GR}=2/3\overline{AN}$.
8. Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ conociendo las medidas de las tres medianas $\overline{BP}$, $\overline{NA}$ y $\overline{MC}$. Sugerencia: aplique el ejercicio anterior.
9. Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, se construyen los triángulos $\widehat{AMN}$, $\widehat{BPQ}$ y $\widehat{CRS}$ simétricos del $\widehat{ABC}$ respecto a los tres vértices respectivamente.
   a) Demostrar que el hexágono MNPQRS tiene sus lados opuestos paralelos
   b) Demostrar que el perímetro del hexágono es el triple del perímetro del $\widehat{ABC}$
10. Sean A y B dos puntos fijos y P distintos de ellos Sean $P_1= C_A(P)$, $P_2=C_B(P_1)$ y $P_3=C_A(P_2)$. Clasificar el cuadrilátero $PP_1P_2P_3$.
11. Se da una cfa. $\mathscr{C}$ y dos puntos exteriores A y O fijos. Se construyen los paralelogramos ABCD con B variable en $\mathscr{C}$ y de centro O Hallar el lugar geométrico de D.

CAPITULO 5

PARALELISMO Y TRASLACION



1. PARALELISMO ENTRE RECTAS

Previamente a estudia las propiedades de la traslación introduciremos algunas consecuencias básicas del axioma de Euclides, (axioma de paralelismo), que caracteriza de manera única a la geometría métrica, llamada precisamente Euclidiana.

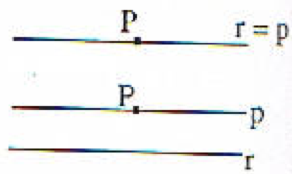
Recordemos que dos rectas son paralelas en el plano si su intersección es vacía o si son rectas coincidentes.

1.1 AXIOMA DE PARALELISMO

Por un punto P existe y es única la paralela (p) a una recta dada (r).

Si $P \in r \Longrightarrow$

Si $P \notin r \Longrightarrow$



1.2. Relación de equivalencia

El paralelismo es una relación de equivalencia entre rectas .

Demostración

Debemos probar que se cumplen las propiedades idéntica, recíproca y transitiva.

Idéntica $a \parallel a$

Como $a = a \Rightarrow a \parallel a$

Recíproca $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

Si $a \cap b = \varnothing \Rightarrow b \cap a = \varnothing$ y $b \parallel a$

Si $a = b \Rightarrow b = a$ y $b \parallel a$

Transitiva $a \parallel b$ y $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

Si (a) y (c) no tienen puntos en común entonces $a \cap c = \varnothing$ y $a \parallel c$

Si (a) y (c) tienen al menos un punto en común P; por dicho punto existe y es única la paralela a (b) (axioma). Como por hipótesis (a) y (c) son paralelas a (b),deben coincidir, entonces $a = c$ y por lo tanto $a \parallel c$.

Definición

Por ser el paralelismo de rectas, una relación de equivalencia, determina en el conjunto de todas las rectas del plano, una partición en clases de equivalencia, llamadas **direcciones**, de modo que si dos rectas son paralelas, tiene la misma **dirección**.

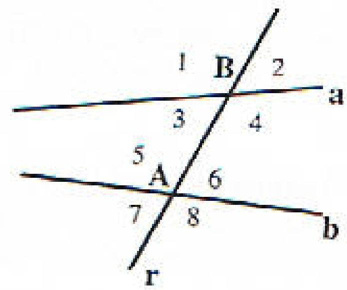
2. EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que si en un plano, una recta corta a otra entonces corta a todas sus paralelas.
2) Demostrar que el paralelismo se conserva en las isometrías.

3. RELACIONES ENTRE RECTAS PARALELAS Y ANGULOS

3.1 Ángulos particulares

Dadas dos rectas (a) y (b) y una secante (r) resultan ocho ángulos de especial interés.



Ángulos internos

Ángulos de vértice A que contienen a B y recíprocamente ellos son 3, 4, 5 y 6.

Ángulos externos

Ángulos no internos 1, 2, 7 y 8

Ángulos colaterales

Pares de ángulos que quedan en igual semiplano respecto de (r), y de distinto vértice. Ellos son: 1 y 5, 1 y 7, 3 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 2 y 8, 4 y 6, 4 y 8.

Ángulos alternos

Pares de ángulos de distinto vértice que quedan en diferente semiplano respecto de (r). Ellos son: 1 y 6, 1 y 8, 3 y 6, 3 y 8, 2 y 5, 2 y 7, 4 y 5, 4 y 7.

Ángulos correspondientes

Pares de ángulos colaterales uno interno y otro externo. Ellos son: 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8.

Ángulos alternos internos 3 y 6, 4 y 5.

Ángulos alternos externos 1 y 8, 2 y 7.

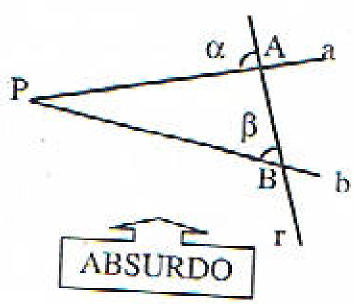
3.2 Ángulos correspondientes

Es condición necesaria y suficiente, para que dos rectas (a) y (b) sean paralelas, que determinen con una secante (r), ángulos correspondientes α y β congruentes.

Demostración

En primer lugar demostraremos que si los ángulos son congruentes entonces las rectas son paralelas, o sea que si $\alpha=\beta \Rightarrow a \parallel b$.

Supongamos por absurdo que (a) y (b) no son paralelas, entonces existe $\{P\}=a \cap b$. En el $\widehat{PAB}$, α es ángulo externo, por lo que, $\alpha > \beta$ lo que contradice la hipótesis $\alpha=\beta$, de donde, (a) debe ser paralela a (b).

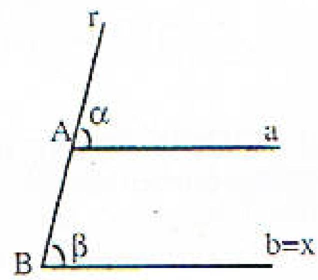


A continuación probaremos que si

$$a \parallel b \Rightarrow \alpha = \beta$$

Sea **f** la isometría directa que transforma la semirrecta $\overline{Ar}$ en $\overline{Br}$ ($\overline{Ar}$ incluida en $\overline{Br}$) y $\overline{Bx}$ la imagen de $\overline{Aa}$ en **f**.

Como $r\widehat{A}a$ y $r\widehat{B}x$ son congruentes por ser transformados en **f**, y además, estos ángulos resultan correspondientes, aplicando la parte anterior de la demostración , se cumple que $a \parallel x$, y considerando que por B existe una sola paralela a (a), entonces (b) debe coincidir con (x) y por consiguiente $\alpha = \beta$.

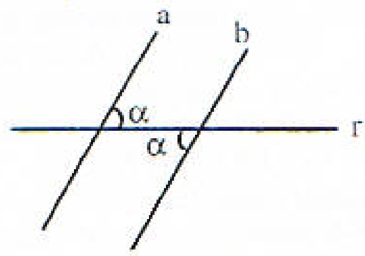


3.3 Ángulos alternos internos

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que determinen con una secante ángulos alternos internos congruentes.

Demostración

Teniendo en consideración que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes y aplicando el teorema anterior la demostración es inmediata.



3.4 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
2) Demostrar que si una recta es perpendicular a otra entonces es perpendicular a todas sus paralelas.

4.- EJEMPLO

En un triángulo $\widehat{ABC}$, las bisectrices de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ se cortan en un punto I. Por I se traza la paralela (p) a la recta (AC), que corta a (AB) en P y a (BC) en Q.

1) Probar que API e ICQ son isósceles.

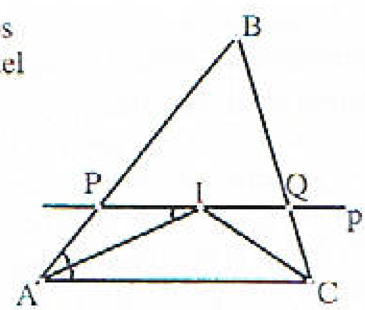
2) Probar que PQ=AP+CQ.

Solución

1) Como $p \parallel AC$ se cumplirá que $\widehat{PIA}=\widehat{IAC}$ por ser ángulos alternos internos, y además IAC=IAP por ser AI bisectriz del PAC; luego por transitiva se cumple que $\widehat{PIA}=\widehat{IAP}$ de donde, el triángulo $\widehat{API}$ tiene dos ángulos congruentes, y en consecuencia es isósceles.

Se razona análogamente para el triángulo $\widehat{ICQ}$.

2) Considerando que PQ=PI+IQ y que AP=PI y CQ=IQ, por ser los triángulos isósceles; se concluye que PQ=AP+CQ.

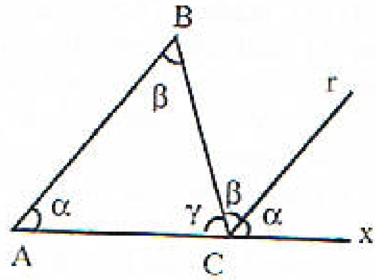


5. SEGUNDO TEOREMA DEL ANGULO EXTERNO

En todo triángulo, cualquier ángulo externo es igual a la suma de los otros dos ángulos interiores no adyacentes a él.

Demostración

En el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura de ángulos α, β y γ consideremos la semirrecta $\overrightarrow{Cr}$ paralela a (AB) y sea $\overleftarrow{Cx}$ la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{CA}$. Como $A\widehat{B}C = B\widehat{C}r$ por ser alternos internos entonces $B\widehat{C}r = \beta$. Como $B\widehat{A}C = r\widehat{C}x$ por ser ángulos correspondientes entonces $r\widehat{C}x = \alpha$. Luego $B\widehat{C}x = \alpha + \beta$ como queríamos probar.



Corolario

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a un ángulo llano.

5.1 EJERCICIO TEORICO

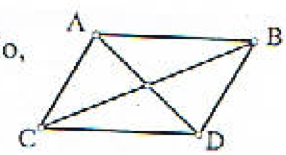
Probar que la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera, es igual a tantos ángulos llanos como lados tiene, menos dos.

6. VECTORES

Si se considera el conjunto de todos los puntos de un plano π, y se efectúa el producto cartesiano $\pi \times \pi$, a cada elemento $(A, B) \in \pi \times \pi$ se le puede asociar el segmento orientado AB en el cual se distinguen el origen A y el extremo B. Obsérvese que los segmentos orientados AB y BA son entes geométricos diferentes, al haberse establecido un orden entre sus extremos. La recta AB se llama soporte o sostén del segmento orientado AB.

Equipolencia de segmentos orientados en el plano.

El segmento orientado AB es equipolente al CD ($AB \sim CD$) si y sólo si, los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen el mismo punto medio, o sea que se cumplirá :

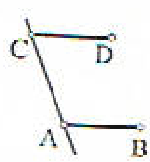


$$AB \sim CD \iff \begin{cases} \text{1) Sus rectas sostenes son paralelas} \\ \text{2) Sus longitudes son iguales} \\ \text{3) Sus sentidos son iguales *} \end{cases}$$

* Igual sentido

Si A, B, C y D son colineales, igual sentido implica que $A \prec B$ y $C \prec D$.

Si A, B, C y D no son colineales; igual sentido; implica que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ queden incluidas en un mismo semiplano respecto de la recta (AC).



Definición de vector

La equipolencia entre segmentos orientados establece; en el conjunto de todos los segmentos orientados incluidos en el plano π, una partición en clases de equivalencia.

Es decir, para todo segmento orientado AB, podemos considerar el conjunto de todos los segmentos orientados del plano π que son equipolentes al AB.

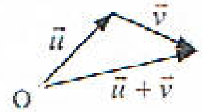
Todas estas clases de equivalencia así formadas son disjuntas dos a dos. A cada una de estas clases se le llama **vector**, que anotaremos $\overrightarrow{AB}$. Podemos afirmar que si los segmentos orientados AB y CD pertenecen a una misma clase de equivalencia entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Vector opuesto :. Dado el vector $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ llamamos vector opuesto a : $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$

Vector nulo : Si A=B entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}$, que llamaremos vector nulo.

Vector suma : Existe en el conjunto de los vectores una operación llamada adición, que asocia a todo par de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, un vector llamado suma, $\vec{u} + \vec{v}$.

Para determinarlo geométricamente, se puede usar el método de Chasles, en el que se ubica en un punto cualquiera del plano el origen de un representante del primer vector $\vec{u}$, a continuación se ubica coincidiendo con el extremo final del primer vector el origen de un representante del segundo vector $\vec{v}$. El vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ queda determinado por el origen del primer vector y el extremo final del segundo vector.



Grupo conmutativo (V*,+)

El conjunto de los vectores, con la operación adición, constituyen una estructura de grupo conmutativo; recordemos sus propiedades.

- La adición, "+", es ley de composición interna
- Conmutativa $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Asociativa $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Neutro , llamado vector nulo, tal que $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v}$
- Simétrico , llamado vector opuesto, tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o}$

7. TRASLACION

Definición

Se denomina traslación de vector $\vec{u}$, que se anotará $T_{\vec{u}}$, a la isometría determinada por las siguientes ternas correspondientes :

$$T_{\vec{u}} : \pi \to \pi \ / \ (A, \overline{AB}, \alpha) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} (B, \text{op.}(\overline{BA}), \alpha)$$

- El vector $\vec{u}$ de la traslación queda determinado por $\overrightarrow{AB}$
- La recta AB recibe el nombre de guía
- La traslación es una isometría directa

8. PROPIEDADES DE LA TRASLACION

8.1 Recta guía

La recta guía de la traslación es doble

Hipótesis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ Tesis $T_{\vec{u}}(r) = r$

AB = r

Demostración

Todo punto de la semirrecta $\overline{AB}$ se transforma en un punto de la semirrecta opuesta a $\overline{BA}$ y considerando que ambas semirrectas están incluidas en (r), se concluye que (r) se transforma en sí misma, permaneciendo globalmente invariante.

8.2 Imágenes de puntos de la recta guía

El vector determinado por un punto P de la recta guía (r) y su imagen P', es igual al vector que define la traslación.

Hipótesis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ Tesis $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$

$T_{\vec{u}}(P) = P'$

Demostración

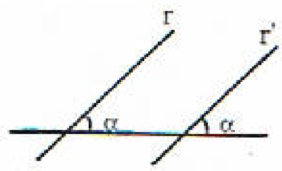
Supongamos $A \prec B \prec P$, (los demás casos se demuestran análogamente)

Como A, B, P y P' pertenecen a (r), $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PP'}$ tienen la misma dirección.
Además como el orden se conserva en las isometrías, si $A \prec P$ entonces $B \prec P'$, de donde, $A \prec B \prec P \prec P'$, lo cual implica que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PP'}$ tienen el mismo sentido.
Por último como $T_{\vec{u}}(\overline{AP}) = \overline{BP'}$ entonces $\overline{AP} = \overline{BP'}$, además, $B \in \overline{AP} \Rightarrow AB + \overline{BP} = \overline{AP}$ y $P \in \overline{BP'} \Rightarrow \overline{BP} + \overline{PP'} = \overline{BP'}$, (axioma métrico), por lo que considerando estas últimas tres igualdades, se puede afirmar que $\overline{AB} = \overline{PP'}$, o sea, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PP'}$ tienen el mismo módulo.
Concluimos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'} = \vec{u}$

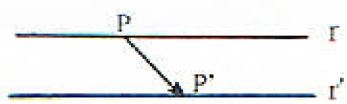
8.3 EJERCICIOS TEORICOS

Demostrar las siguientes proposiciones:

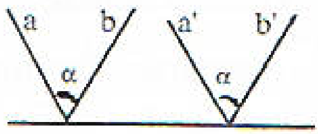
1) Toda recta secante a la guía y su imagen son paralelas



2) Dos rectas paralelas son siempre correspondientes en una traslación cuyo vector queda determinado por un punto cualquiera de cada una de ellas.



3) Dos ángulos cuyos lados tienen igual dirección y sentido son congruentes.

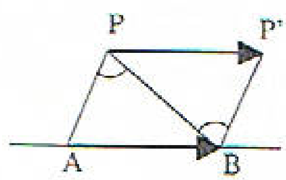


8.4 Imágenes de puntos cualesquiera

El vector determinado por un punto cualquiera y su imagen es igual al vector que define la traslación.

Hipótesis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ Tesis $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$

$T_{\vec{u}}(P) = P'$



Demostración

Los triángulos $\widehat{APB}$ y $\widehat{P'BP}$ son congruentes pues:

1) $\overline{PB}$ es lado común
2) $\overline{AP} = \overline{BP'}$, ya que $T_{\vec{u}}(\overline{AP}) = \overline{BP'}$
3) APB=P'BP, alternos internos de las paralelas AP y BP', (recta secante a la guía y su imagen).

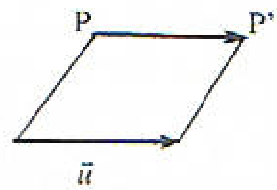
Entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}$ pues tienen el mismo módulo $\overline{AB} = \overline{PP'}$; la misma dirección, ya que AB || PP' (pues $\widehat{PBA} = \widehat{BPP'}$, alternos internos), y el mismo sentido; ya que si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PP'}$ fueran de sentido opuestos AP y BP' serían secantes y no paralelas; lo cual resulta absurdo.

Consecuencias

- Las rectas paralelas a la guía de traslación son dobles.
- Toda traslación queda definida por cualquier par de puntos correspondientes.
- Dos traslaciones son iguales, si definen el mismo vector; o sea $T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

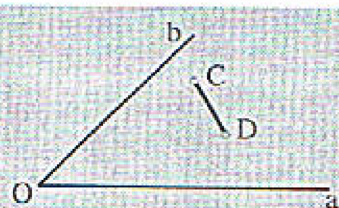
8.5 CONCLUSION IMPORTANTE

☆ Dado un vector $\vec{u}$, se cumple que la isometría que hace corresponder a cada punto P del plano un punto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$ es la traslación $T_{\vec{u}}$.



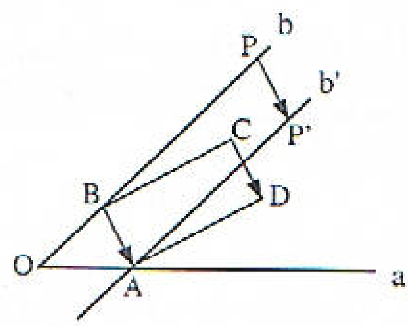
9. EJEMPLO

Se da un ángulo $\widehat{aOb}$ y un segmento interior CD. Construir un paralelogramo (ABCD), con A perteneciente a (a) y B perteneciente a (b).



En una figura de análisis, a partir de un paralelogramo cualquiera ubicamos los datos del problema.

Como (ABCD) es un paralelogramo podemos afirmar que $B = T_{\overrightarrow{CD}}(A)$. Luego A pertenece a (b'), imagen de (b) en la traslación de vector $\overrightarrow{CD}$.



Construcción

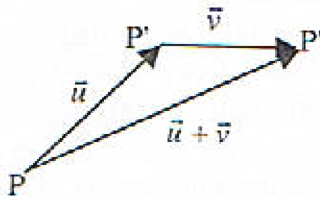
1) Se halla $b' = T_{\overrightarrow{CD}}$ (b) (trasladar un punto P cualquiera de (b) con vector $\overrightarrow{CD}$, y por P' trazar la paralela a (b).
2) Se halla $\{A\} = b' \cap a$.
3) Por A se traza la paralela a CD y en su punto de corte con (b), queda determinado el punto B.

10. GRUPO DE LAS TRASLACIONES DEL PLANO (T*, ∘)

El conjunto de las traslaciones del plano T* y la operación composición "∘" forman una estructura de grupo conmutativo.

Demostración

Probaremos en primer lugar que la composición de dos traslaciones, es una traslación. Para todo punto P del plano se cumple que :



$$P \xrightarrow{T\vec{u}} P' \xrightarrow{T\vec{v}} P''$$

Observamos que $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{P'P''}=\overrightarrow{PP''}$, y como $\overrightarrow{PP'}=\vec{u}$ y $\overrightarrow{P'P''}=\vec{v}$, entonces $\overrightarrow{PP''}=\vec{u}+\vec{v}$, de donde :

$$P \xrightarrow{T\vec{u}+\vec{v}} P''$$

Concluimos que la composición de dos traslaciones, es una traslación, cuyo vector, es la suma de los vectores iniciales. $T\vec{v} \circ T\vec{u} = T\vec{u}+\vec{v}$.

En base a esta última afirmación; todas las propiedades de (V*,+) se cumplirán en (T*,∘), o sea:

Conmutativa $T\vec{v} \circ T\vec{u} = T\vec{u} \circ T\vec{v}$

Asociativa $(T\vec{w} \circ T\vec{v}) \circ T\vec{u} = T\vec{w} \circ (T\vec{v} \circ T\vec{u})$

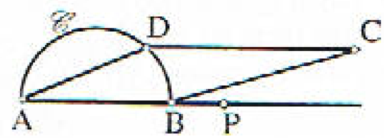
Neutro $T\vec{v} \circ T\vec{o} = T\vec{v}$

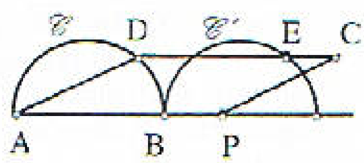
Simétrico $T\vec{v} \circ T_{-\vec{v}} = T\vec{o}$

11. EJEMPLO

Se dan tres puntos alineados A,B y P se considera la semicircunferencia 𝒞 de diámetro $\overline{AB}$. Se construyen los trapecios ABCD con D perteneciente a 𝒞, AB paralela a DC y $\overline{DC}=\overline{AP}$. Sea E el transformado del punto D en la composición $T_{\overrightarrow{PB}} \circ T_{\overrightarrow{DC}}$.

Hallar el lugar geométrico de E al variar D en 𝒞.





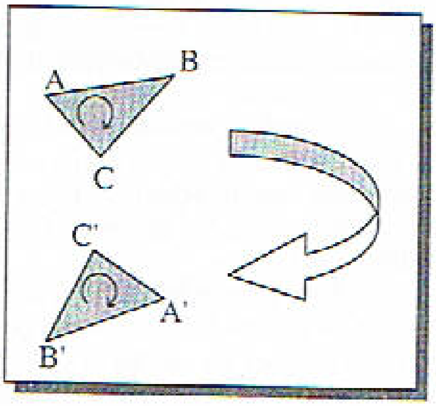
Como AP ∥ DC y $\overline{AP}=\overline{DC}$, se cumple que el cuadrilátero APCD es un paralelogramo, de donde $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AP}$. La suma de los vectores $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$ es igual al vector $\overrightarrow{AB}$, por lo cual, $T_{\overrightarrow{PB}} \circ T_{\overrightarrow{AP}} = T_{\overrightarrow{AB}}$. Se puede afirmar entonces que $D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AB}}} E$ por lo que el lugar geométrico de E es la semicircunferencia 𝒞', transformada de 𝒞, en la $T_{\overrightarrow{AB}}$.

12. EJERCICIOS

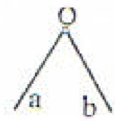
1) Sean una cfa. $\mathscr{C}$, una recta (r) exterior y un segmento $\overline{AB}$. Hallar P y Q de modo que AB $\parallel$ PQ , $\overline{AB} = \overline{PQ}$, y $P \in \mathscr{C}$, $Q \in r$.
Discutir posibilidad de la construcción.
2) Dados tres rectas (a), (b) y (c), secantes entre sí, y la medida de un segmento $\overline{AB}$, ubicar el $\overline{AB}$ tal que $A \in a$ $B \in b$ y AB $\parallel$ c.
3) Sobre un ángulo $a\widehat{O}b$ se considera $\overline{Ox}$ bisectriz del ángulo. Sea $P \in \overline{Ox}$. Por P se traza la paralela (p) al lado $\overline{Oa}$. Sea $p \cap \overline{Ob} = \{Q\}$.
Probar que $\widehat{OPQ}$ es isósceles.
4) Construir los trapecios ABCD,horarios, con AD $\parallel$ BC tal que:
a) $\overline{AB}=3$ $\overline{AD}=4$ $\overline{BC}=6$ $\overline{AC}=8$
b) $\overline{BC}=5$ $A\widehat{B}C=60°$ $B\widehat{C}D=45°$ $\overline{AB}=3$
c) $\overline{AB}=2$ $\overline{AD}=4$ $\overline{DC}=3$ $B\widehat{A}D=120°$
5) En una circunferencia. $\mathscr{C}$ de centro O se consideran los triángulos $\widehat{AMB}$ horarios con $\overline{AB}$ cuerda fija y M variable en $\mathscr{C}$.
Se construyen los paralelogramos AMCB horarios.
a) Lugar geométrico del punto C
b) Demostrar que el ángulo $M\widehat{B}C$ es constante.
6) Se da una recta (t) y dos puntos A y A' en ella. Se construyen dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ de centros O y O', tangentes a (t) en A y A' de igual radio y en un mismo semiplano; exteriores. Sobre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ se toman los puntos B y B' tal que $B\widehat{O}A = B'\widehat{O'}A' = \alpha$ en un mismo sentido.
A) Probar que ABB'A' es un paralelogramo.
B) Lugar geométrico de M, punto medio de $\overline{BB'}$ al variar α.
7) Sea una recta (r) y un segmento exterior $\overline{BC}$ que no corta A (r). Se construyen los paralelogramos (ABCD) con A variable en (r). Lugar geométrico de D.
8) Se considera un triángulo $\widehat{ABC}$ antihorario. Sean $A' = T_{\overline{BC}}(A)$, $B' = T_{\overline{CA}}(B)$ y $C' = T_{\overline{AB}}(C)$. Por un punto P exterior se consideran $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}$.
Probar que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA'}$ y $\overline{MN} = 2m_b$
$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{AC'}$ y $\overline{NQ} = 2m_a$
$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{CB'}$ y $\overline{QM} = 2m_c$
siendo m_a ,m_b y m_c las medidas de las medianas del $\widehat{ABC}$.
9) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo las medidas de las tres medianas.
Sugerencia : Aplique el ejercicio anterior construyendo el triángulo $\widehat{MNQ}$, cuyos lados miden el doble de las medidas de las medianas.

CAPITULO 6

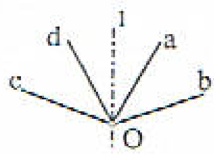
ROTACION



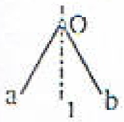
1. ANGULOS ORIENTADOS



Consideremos el conjunto de todos los pares ordenados de semirrectas del plano con el mismo origen. A dichos pares los anotaremos $(\overline{Oa},\overline{Ob})$ o simplemente (a,b)
Introduciremos en dicho conjunto una relación que cumple las propiedades idéntica, simétrica y transitiva del siguiente modo:
(a,b) ~ (c,d) si y sólo si, la simetría axial que hace corresponder a la semirrecta $\overline{Oa}$ con $\overline{Od}$ también hace corresponder a $\overline{Ob}$ con $\overline{Oc}$. Llamando S_1 a la simetría indicada, podemos expresar en símbolos:



Definición: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow S_1(a) = d$ y $S_1(b) = c$
Probaremos a continuación las propiedades mencionadas.
Idéntica: $(a,b) \sim (a,b)$



Si se considera la simetría de eje la recta que contiene la bisectriz del ángulo convexo determinado por $\overline{Oa}$ y $\overline{Ob}$ (que existe y es única), se cumplirá que: $S_1(a) = b$ y también que $S_1(b) = a$, ya que la simetría axial es involutiva, resultando entonces por definición que $(a,b) \sim (a,b)$

Recíproca: $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$
Por definición se tiene que: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow S_1(a) = d$ y $S_1(b) = c$
Considerando que la simetría axial es involutiva se cumple que $S_1(d) = a$ y $S_1(c) = b$, y aplicando la definición, resulta $(c,d) \sim (a,b)$

Transitiva: $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$
Por hipótesis se cumple que $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow S_1(a) = d$ y $S_1(b) = c$
$(c,d) \sim (e,f) \Leftrightarrow S_2(c) = f$ y $S_2(d) = e$
Como ya hemos demostrado $(e,f) \sim (e,f) \Leftrightarrow S_3(e) = f$ y $S_3(f) = e$
Admitiendo que la composición de tres simetrías axiales de ejes concurrentes, es otra simetría axial cuyo eje contiene al punto de intersección de los ejes primeros, (proposición demostrada en el capítulo 8, numeral 1.3), y combinando las anteriores transformaciones resulta:

$$a \xrightarrow{S_1} d \xrightarrow{S_2} e \xrightarrow{S_3} f$$
$$b \longrightarrow c \longrightarrow f \longrightarrow e$$

Si establecemos que $S_4 = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ entonces $a \xrightarrow{S_4} f$, $b \longrightarrow e$

o sea que: $S_4(a) = f$ y $S_4(b) = e \Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f)$ como se quería demostrar.

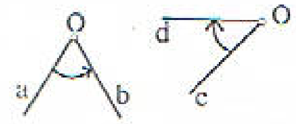
Definición de ángulo orientado

Al cumplir con las propiedades demostradas la relación definida es de equivalencia, y determina en el conjunto de pares ordenados de semirrectas del mismo origen, una partición en clases de equivalencia. A cada una de estas clases se le llama ángulo orientado de vértice O.

Cada par de semirrectas de origen O es un representante de un ángulo que anotaremos $\widehat{aOb}$, o $\vec{a,b}$ o $\vec{(a,b)}$ queriendo significar con el sentido de la flecha la semirrecta inicial y la final.
En lo sucesivo para establecer que dos ángulos pertenecen a la misma clase, usaremos el signo de " = " en lugar de " ~ ".
Llamaremos **ángulo orientado nulo** (o completo ya que en este tipo de ángulos coinciden) a todo ángulo orientado cuyas semirrectas coincidan.
Se denomina **ángulo orientado llano** a aquel cuyos lados son semirrectas opuestas.
Dado cualquier ángulo orientado $\widehat{aOb}$, llamaremos **ángulo opuesto** del primero, al ángulo $\widehat{bOa}$.

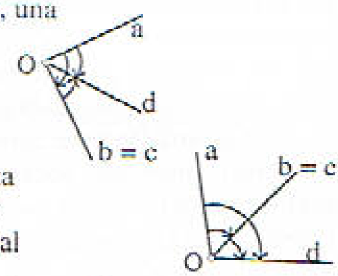
Sentidos en el plano

A veces es frecuente referirse a los ángulos orientados indicando el sentido del ángulo (horario o antihorario), considerado desde la primer componente del par hacia la segunda. Para indicar el sentido antihorario utilizaremos el signo positivo, indicando por ejemplo $\widehat{aOb} = +60°$, y para el sentido horario el signo negativo, por ejemplo $\widehat{cOd} = -45°$.



Suma de ángulos orientados

Existe en el conjunto de los ángulos orientados del mismo vértice, una operación llamada adición, que asocia a todo par de ángulos orientados un ángulo orientado del mismo vértice llamado suma de los anteriores. Para determinarlo geométricamente puede usarse el siguiente método: se ubica el primer ángulo $\widehat{aOb}$ y a continuación el segundo ángulo $\widehat{cOd}$ tal que la semirrecta final Ob del primer ángulo coincida con la inicial Oc del segundo ángulo. El ángulo suma queda determinado por la semirrecta inicial del primero y la final del segundo es decir $\widehat{aOd}$.



$b = c \Rightarrow (a,b) + (c,d) = (a,d)$, o en la otra notación: $\overline{Ob} = \overline{Oc} \Rightarrow \widehat{aOb} + \widehat{cOd} = \widehat{aOd}$

Grupo Conmutativo

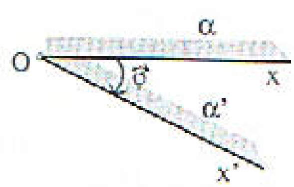
El conjunto de los ángulos orientados del mismo vértice, con la operación adición constituyen una estructura de grupo conmutativo, o sea que la suma de dos ángulos orientados de igual vértice es un ángulo orientado con el mismo vértice, y son válidas las propiedades conmutativa, asociativa, la existencia de neutro (ángulo nulo), y la existencia para cada elemento del conjunto, de su simétrico (ángulo opuesto).

2. ROTACION

Definición

Se define rotación de centro O y ángulo orientado $\vec{\varphi}$, que se anotará $R_{O,\vec{\varphi}}$ a la isometría directa determinada por las siguientes ternas correspondientes:

$$\boxed{R_{O,\vec{\varphi}} : \pi \rightarrow \pi \;/\; (O, \overline{Ox}, \alpha) \xrightarrow{R_{O,\vec{\varphi}}} (O, \overline{Ox'}, \alpha')}$$



- El ángulo de rotación $\vec{\varphi}$, cumple la igualdad $\vec{\varphi} = \widehat{xOx'}$

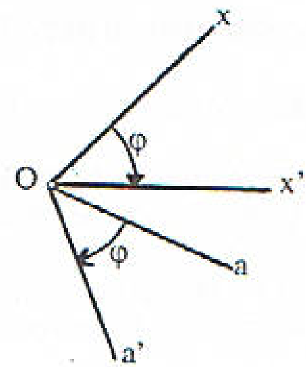
3. IMAGEN DE UNA SEMIRRECTA CON ORIGEN EN EL CENTRO DE GIRO

El ángulo convexo orientado, determinado por dos semirrectas correspondientes, con origen en el centro de giro, es igual al ángulo de rotación.

Hipótesis : $R_{O,\vec{\varphi}}(\overline{Oa}) = \overline{Oa'}$, $\widehat{xOx'} = \vec{\varphi}$ Tesis : $\widehat{aOa'} = \vec{\varphi}$

Demostración

Supongamos el siguiente caso , $\overline{Ox} \prec \overline{Ox'} \prec \overline{Oa}$, los demás se demuestran análogamente. Como el orden se conserva en las isometrías, si $\overline{Ox} \prec \overline{Oa}$, entonces $\overline{Ox'} \prec \overline{Oa'}$, de donde se cumplirá que $\overline{Ox} \prec \overline{Ox'} \prec \overline{Oa} \prec \overline{Oa'}$, lo cual implica que $\widehat{xOx'}$ y $\widehat{aOa'}$ tienen el mismo sentido .Considerando que $\widehat{x'Oa'}$ es la imagen de $\widehat{xOa}$ en $R_{O,\vec{\varphi}}$, dichos ángulos resultaran congruentes, o sea que $\widehat{xOa} = \widehat{x'Oa'}$ y como $\widehat{xOa} = \widehat{xOx'} + \widehat{x'Oa}$ y $\widehat{x'Oa'} = \widehat{x'Oa} + \widehat{aOa'}$ (ver figura),si se combinan estas tres últimas igualdades se deduce que $\widehat{xOx'} = \widehat{aOa'} = \vec{\varphi}$,
que era lo que se quería probar

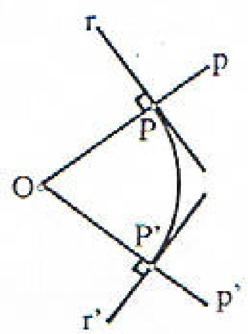


4. PROPIEDADES DEL CENTRO DE ROTACIÓN

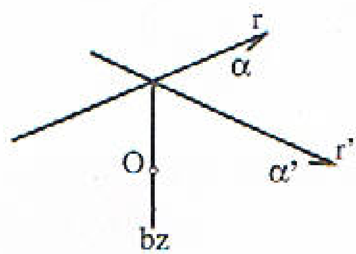
4.1 El centro de giro equidista de todo par de rectas correspondientes.

Demostración

Sea (r) una recta cualquiera y (r') su imagen en la $R_{O,\vec{\varphi}}$
Si se considera la recta (p), perpendicular a (r) por O, y P su intersección con ella, se cumplirá que la $d(O,r) = OP$
Sean (p') y P' las imágenes de (p) y P . Considerando que la perpendicularidad se conserva en las isometrías se debe de cumplir que $r' \perp p'$ por P', por lo cual la $d(O,r') = OP'$.
Además como el segmento $\overline{OP}$ tiene como imagen a $\overline{OP'}$, se cumplirá la congruencia de dichos segmentos y por lo tanto $OP = OP'$, o sea que $d(O,r) = d(O,r')$ y por lo tanto el centro O equidista de las rectas correspondientes.



Corolario
El centro de rotación pertenece a la bisectriz del ángulo determinado por una semirrecta y su imagen, con sus semiplanos correspondientes.

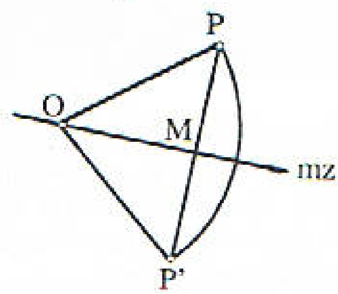


4.2 El centro de rotación pertenece a la mediatriz del segmento determinado por un punto y su imagen.

Demostración

Sea un punto P y su imagen P' en la rotación de centro O, y M el punto medio de PP'. Como $\overline{OP} \rightarrow \overline{OP'}$, entonces $OP = OP'$

Se observa que los triángulos $\widehat{OPM}$ y $\widehat{OP'M}$ son congruentes por tener sus tres lados iguales,

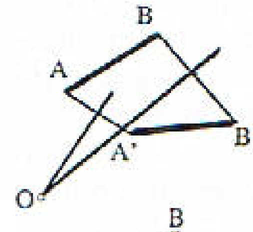


por lo que sus ángulos $O\widehat{M}P$ y $O\widehat{M}P'$ también lo serán. Como estos ángulos iguales son adyacentes, entonces serán rectos y por lo tanto OM es la perpendicular a $\overline{PP'}$ en su punto medio, o sea que O esta incluido en la mediatriz del segmento

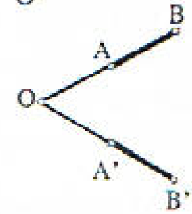
5. CONSTRUCCION DEL CENTRO

- Dados dos segmentos correspondientes $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

El centro se halla efectuando la intersección de las mediatrices de los segmentos homólogos.

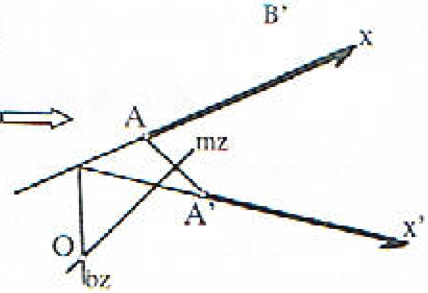


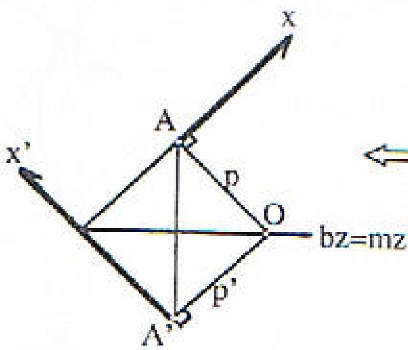
Si las mediatrices coinciden el centro es la intersección de las rectas AB y A'B'



- Dadas dos semirrectas correspondientes $\overrightarrow{Ax}$ y $\overrightarrow{A'x'}$

El centro se halla mediante la intersección de la mediatriz del segmento $\overline{AA'}$ con la bisectriz del ángulo $\widehat{x,x'}$, formado por la intersección de semiplanos correspondientes.

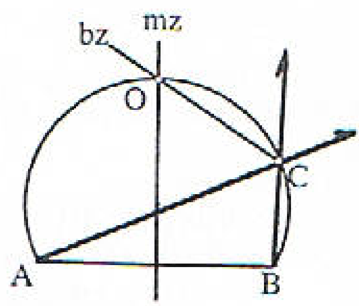




Si la bisectriz y la mediatriz coinciden, el centro O se halla mediante la intersección de las rectas (p) y (p'), perpendiculares a (x) por A, y a (x') por A' respectivamente, como indica la figura.

6. EJEMPLO

Se considera un arco capaz de segmento $\overline{AB}$ y 60° y un punto C cualquiera de dicho arco. Hallar ángulo y centro de la rotación que transforma a la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{BC}$

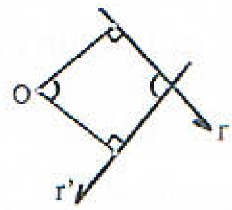


El centro O, se halla efectuando la intersección de la mediatriz del segmento que determinan los orígenes, $\overline{AB}$, con la bisectriz del ángulo formado por las rectas AC y BC (determinado por la intersección de sus semiplanos correspondientes ambos a la derecha o a la izquierda de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$).

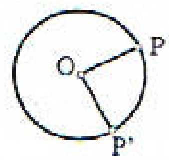
Observamos que la bisectriz es exterior al ángulo inscrito; por lo que, cortará a la mediatriz en el punto medio del arco.

El ángulo de giro queda determinado por $\widehat{AOB}$, en ese sentido; o sea 60° antihorario. De donde $\overline{AC} \xrightarrow{R_{O,+60^\circ}} \overline{BC}$

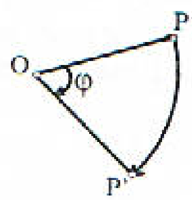
7. EJERCICIOS TEORICOS



1) Demostrar que el ángulo determinado por dos rectas orientadas correspondientes y sus semiplanos respectivos es igual al suplementario del ángulo de rotación.
2) Toda circunferencia con centro en el centro de rotación es doble.
3) El único punto unido en una rotación de ángulos no nulo es el centro. Sugerencia: suponer por absurdo que existe otro punto unido.



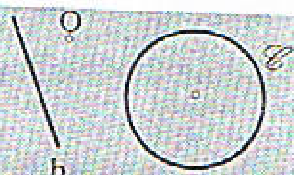
8. CONCLUSION IMPORTANTE



☆ Dado un punto O y un ángulo $\vec{\varphi}$ convexo y orientado, la isometría que hace corresponder al punto O a sí mismo, y a cada punto P del plano distinto de O, un punto P' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $\overrightarrow{POP'} = \vec{\varphi}$ es la rotación $R_{O,\vec{\varphi}}$

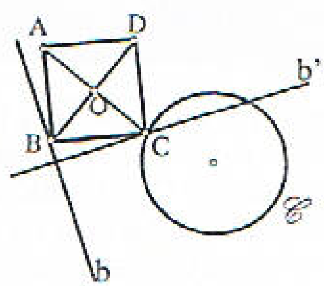
9. EJEMPLO

Se consideran la circunferencia $\mathscr{C}$, la recta (b) y el punto O de la figura. Construir un cuadrado ABCD (sentido antihorario) y de centro O, tal que B pertenezca a (b) y C a la circunferencia.



En una figura de análisis construimos un cuadrado ABCD cualquiera y ubicamos (b) y $\mathscr{C}$ en las condiciones del problema.

Observamos que B puede transformarse en C en una rotación de centro O y ángulo 90° antihorario pues $\overline{OB}=\overline{OC}$ y $\widehat{BOC}=90°$ (propiedad de las diagonales del cuadrado). Como $B \in b$, entonces C pertenecerá a (b'), imagen de (b) en dicha rotación. Además considerando que $C \in \mathscr{C}$ dicho punto puede hallarse mediante la intersección de (b') con $\mathscr{C}$.



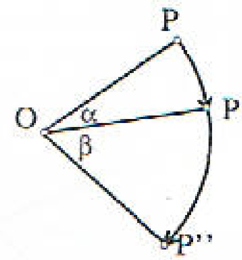
Construcción

1) Se construye (b') imagen de (b) en la rotación de centro O y 90° antihorario
2) Se hallan los posibles puntos $C = b' \cap \mathscr{C}$
3) Se construye B efectuando la rotación inversa de la anterior sobre el punto C, o sea centro O y ángulo 90° horarios.
4) Se simetrizan B y C respecto de O, obteniéndose respectivamente D y A.

10. GRUPO DE LAS ROTACIONES CONCENTRICAS ($R_O^*, \circ$)

El conjunto de las rotaciones de igual centro R_O^*, con la operación composición "$\circ$", forman una estructura de grupo conmutativo.

Demostración



Probaremos en primer lugar que la composición de dos giros de igual centro, es un giro con dicho centro y cuyo ángulo es la suma de los ángulos iniciales. Para todo punto P se cumple que:

$$P \xrightarrow{R_{O,\vec{\alpha}}} P' \xrightarrow{R_{O,\vec{\beta}}} P''$$

De la primera rotación se cumple que $\overline{OP}=\overline{OP'}$ y $\widehat{POP'}=\vec{\alpha}$ y de la segunda $OP'=OP''$ y $P'OP''=\beta$. Por transitiva tenemos que $OP=OP''$ y por suma de ángulos $\widehat{POP''}=\alpha+\beta$, de donde podemos afirmar que $P \xrightarrow{R_{O,\widehat{\alpha+\beta}}} P''$ por lo cual $R_{O,\vec{\beta}} \circ R_{O,\vec{\alpha}} = R_{O,\widehat{\alpha+\beta}}$

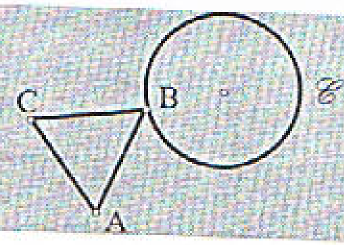
Luego, es posible trasladar todas las propiedades del grupo conmutativo de los ángulos orientados (A^*,+), hacia el de las rotaciones ($R_O^*, \circ$), resultando así también un grupo conmutativo.

Observaciones

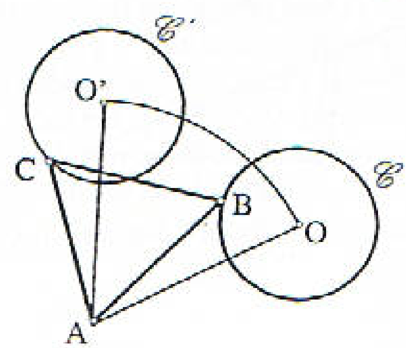
- El conjunto de los giros con distinto centro no forman grupo.
- La rotación de ángulo llano es equivalente a la simetría central con el mismo centro.

11. EJEMPLO

Dada una cfa. $\mathscr{C}$ y un punto exterior fijo A, se construye los triángulos equiláteros $\widehat{ABC}$,antihorarios, con B perteneciente a la cfa. y variable. Hallar el lugar geométrico de C.



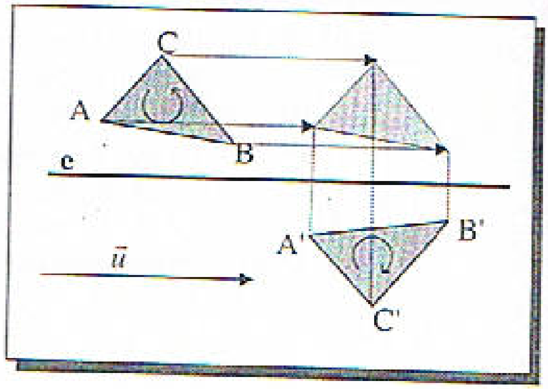
Como A es fijo, $\overline{AB}=\overline{AC}$ y $\widehat{BAC}=60°$, pues el ABC es equilátero, se puede afirmar que B se transforma en C en la rotación de centro A y 60° antihorario. Entonces si $B\in\mathscr{C}$ se cumplirá que $C\in\mathscr{C}'$, siendo $\mathscr{C}' = R_{A,+60°}(\mathscr{C})$. Como todo punto de $\mathscr{C}'$ tiene una preimagen en $\mathscr{C}$ (considerando la rotación inversa) se concluye que el lugar geométrico de C es la cfa. $\mathscr{C}'$.



12. EJERCICIOS

1) Se da una cfa. ($\mathscr{C}$), una cuerda $\overline{AB}$ de ella y un punto P exterior. Hallar las figuras que se indican en las siguientes rotaciones.
   A) $\mathscr{C}'$ tal que $\mathscr{C}' = R_{P,+60°}(\mathscr{C})$.
   B) Arco A'B' tal que $A'B' = R_{P,+90°}(AB)$
   C) Recta A'B' / $A'B' = R_{P,+45°}(AB)$.
   D) Arco A''B'' / $A''B'' = R_{B,-90°}(AB)$
2) Dadas tres rectas paralelas a. b y c. construir un cuadrado ABCD tal que $A \in a$, $B \in b$ y $C \in c$.
3) Dadas dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ y un punto exterior B, construir un cuadrado ABCD tal que $A \in \mathscr{C}$ y $C \in \mathscr{C}'$.
4) Se da una cfa. $\mathscr{C}$ y un punto A exterior. Se considera B variable en la cfa. y se construyen los triángulos rectángulos en A e isósceles, $\widehat{ABC}$, en sentido horario. Lugar geométrico del punto C.
5) Se considera una recta (r) y un punto A exterior, fijos. Sobre r varía un punto B. Se construyen los rombos ABCD con $\widehat{ABC}=60°$, (sentido horario). Lugar geométrico de D.
6) Dado un cuadrado ABCD antihorario, construir un triángulo equilátero $\widehat{APM}$ con $P \in \overline{BC}$ y $M \in \overline{CD}$.
7) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ antihorario, isósceles con $\widehat{A} = 120°$ $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ cm
   A) Hallar el centro O y el ángulo α de la rotación que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CA}$.
   B) Sean P y Q tal que $P \in \overline{AB}$, $\overline{AP} = 2$ cm y $Q \in \overline{CA}$, $\overline{CQ} = 2$ cm. Demostrar que el $\widehat{OPQ}$ es equilátero.
   C) Hallar la imagen A'B'C' del $\widehat{ABC}$ en la rotación de la parte A.
   D) Demuestre que B,O y C' están alineados y que $\widehat{BAC'}=90°$.
8) Se considera un triángulo $\widehat{ABC}$ equilátero antihorario, con H punto medio de $\overline{AC}$. Hallar centro y ángulo de giro que transforma $\overline{BA}$ en $\overline{HC}$.
9) Sea una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y un punto A exterior. Se construyen los cuadrados ABCD horarios con B variable en $\mathscr{C}$.
   A) Lugar geométrico de D al variar B.
   B) Hallar un cuadrado de la familia, tal que $\widehat{ADO}=60°$. Discuta posibilidad de la construcción.
10) Sea un punto O fijo y $P' = R_{O,+90°}(P)$. Hallar el lugar geométrico de los puntos P, para que $\overline{PP'} = 2\sqrt{2}$. Sugerencia : calcular $\overline{OP}$

CAPITULO 7



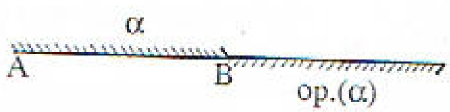
ANTITRASLACION

1. DEFINICION

Se denomina antitraslación de eje **e** y vector $\vec{u}$, que se anotará $AT_{e,\vec{u}}$ a la isometría determinada por las siguientes ternas correspondientes :

$$AT_{e,\vec{u}} : \pi \to \pi \;\; / \;\; (A, \overleftrightarrow{AB}, \alpha) \xrightarrow{AT_{e,\vec{u}}} (B, op.(\overleftrightarrow{BA}), op(\alpha))$$

- El eje queda determinado por , e =AB
- El vector queda determinado por $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- El eje tiene la misma dirección que el vector.
- La antitraslación es una isometría indirecta , no involutiva y sin puntos unidos.



2. LA ANTITRASLACION COMO COMPOSICION DE ISOMETRIAS

Toda antitraslación es igual a la composición de una traslación con una simetría axial, siendo dicha composición conmutativa.

Demostración.

Probaremos que: $AT_{e,\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_e = S_e \circ T_{\vec{u}}$.

Aplicando las definiciones de traslación y simetría axial se cumple que:

$$A \xrightarrow{T_{\vec{u}}} B \xrightarrow{S_e} B$$

$$\overleftrightarrow{AB} \longrightarrow op.(\overleftrightarrow{BA}) \longrightarrow op(\overleftrightarrow{BA})$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha \longrightarrow op(\alpha)$$

Así mismo, si invertimos el orden en la composición, se cumplirá que :

$$A' \xrightarrow{S_e} A \xrightarrow{T_{\vec{u}}} B$$

$$\overleftarrow{AB} \longrightarrow \overleftarrow{AB} \longrightarrow op.(\overleftarrow{BA})$$

$$\alpha \longrightarrow op.(\alpha) \longrightarrow op.(\alpha)$$

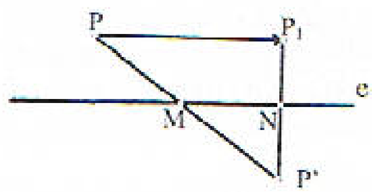
de donde ambas composiciones efectúan las mismas transformaciones que la antitraslación , por lo cual, se deduce la igualdad.

3. PROPIEDADES

3.1 El punto medio del segmento determinado por dos puntos correspondientes en una antitraslación pertenece al eje.

Demostración

Sea un punto P y su imagen P' en la antitraslación $AT_{e.\vec{u}}$, se demostrará que su punto medio M pertenece al eje.



Consideremos los puntos $P_1=T_{\vec{u}}(P)$,

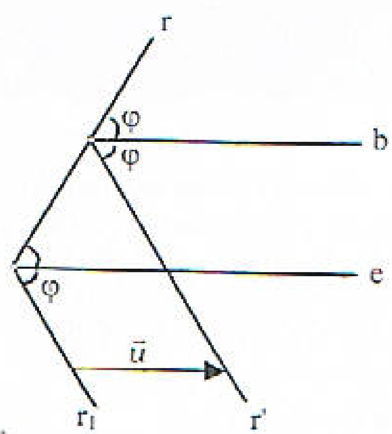
$P'=S_e(P_1)$ y $\{N\}=P'P_1 \cap e$.

Como $\vec{u}=\overrightarrow{PP_1}$,entonces $PP_1 \parallel e$ y considerando que N es punto medio de $P'P_1$ se cumple que el eje (e) contiene a la paralela media del triángulo $\widehat{PP_1P'}$ y por lo tanto ,corta a PP' en su punto medio M.

3.2. La bisectriz del ángulo determinado por dos semirrectas correspondientes en una antitraslación, y sus semiplanos respectivos, es paralela al eje.

Demostración

Sea una recta (r) ,(r') su imagen en la $AT_{e.\vec{u}}$ y (b) la bisectriz de $\widehat{r,r'}$ Probaremos que $b \parallel e$

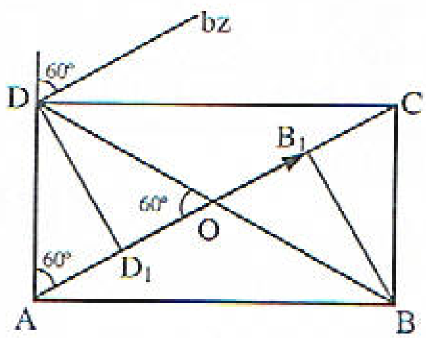


Se consideran las rectas $r_1=S_e(r)$ y $r'=T_{\vec{u}}(r_1)$. El eje de simetría es bisectriz del $\widehat{r,r_1}$, por lo que $\widehat{r,e}=\widehat{r_1,e}$. Sea φ dicho ángulo. Como $r' \parallel r_1$,por la traslación, se cumple que $\widehat{r,r'}=\widehat{r,r_1}$ (ángulos correspondientes).

Entonces $\widehat{r,r'}=2\varphi$ y considerando que $\widehat{r,b}=\varphi$ (pues $b=bz(\widehat{r,r'})$ y $\widehat{r,e}=\varphi$), se concluye que $b \parallel e$, pues determinan con (r) ángulos correspondientes congruentes.

4. EJEMPLO

Dado un rectángulo ABCD de centro O, cuyas diagonales forman ángulos de 60° y 30° con los lados, determinar eje y vector de la antitraslación que transforma DA en BD



Como O es punto medio de BD, dicho punto pertenecerá al eje (e). Además (e) será paralelo a la bisectriz, (bz), del ángulo formado por las rectas AD y BD, con la intersección de semiplanos correspondientes. Recordemos que como las antitraslación, es una isometría indirecta, los semiplanos correspondientes serán uno a la izquierda y otro a la derecha (o viceversa) de las semirrectas DA y BD. Obsérvese que el ángulo mencionado tiene como lados a la semirrecta opuesta a DA y a DB. Como la bisectriz es paralela a (AC), el eje será (AC).

Para hallar el vector proyectamos D y B sobre C obteniéndose D_1 y B_1 puntos medios de AO y OC (pues los triángulos OAD y ABC son equiláteros).

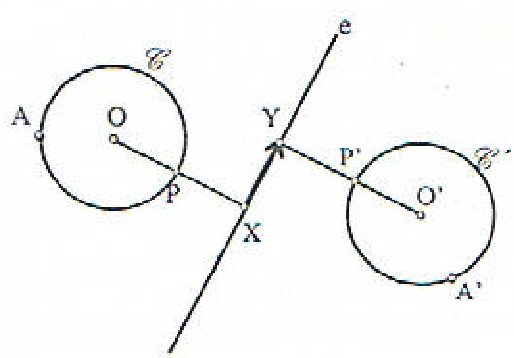
Concluimos entonces, que el eje queda determinado como e =AC y el vector por $\vec{u} = \overrightarrow{AO}$

5. EJEMPLO

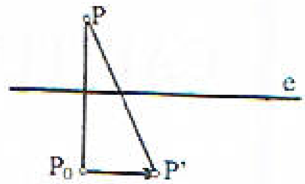
Se considera dos circunferencias $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ congruentes y exteriores y en ellas dos radios OA y O'A' cualesquiera.

1. Determinar el eje (e) y el vector u de la antitraslación que transforma $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ y OA en O'A'.
2. Hallar el par de puntos P,P' mas próximos entre sí de modo que P pertenezca a $\mathscr{C}$ y P' pertenezca a $\mathscr{C}'$.
3. Hallar un par de puntos correspondientes M ,M' tal que $\overline{MM'}$= k (medida dada), con M perteneciente a $\mathscr{C}$ y M' a $\mathscr{C}'$.

1. El eje (e) queda determinado por los puntos medios de OO' y AA'. Para hallar el vector proyectamos los puntos O y O' sobre el eje, (sean X e Y las proyecciones respectivas), resultando $\overrightarrow{XY} = \vec{u}$



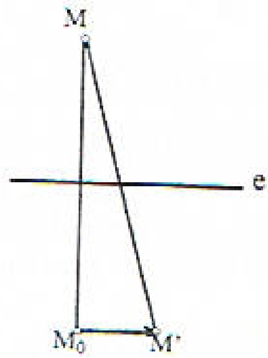
2. Los puntos más próximos entre sí en una antitraslación son los que se encuentran más próximos al eje, ya que en el triángulo rectángulo de la figura, uno de los catetos tiene medida cte. u, por lo cual la hipotenusa $\overline{PP'}$ será la menor posible cuanto menor sea el restante cateto (Pitágoras).



Dichos puntos son

$\{P\}= \overline{OX} \cap \mathscr{C}$ y $\{P'\}=\overline{O'Y} \cap \mathscr{C}'$

3. Se construye el triángulo rectángulo de la figura con $\overline{MM'}= k$ y $\overline{MoM'}= u$



entonces M dista del eje una distancia igual a $\dfrac{\overline{MMo}}{2}$.

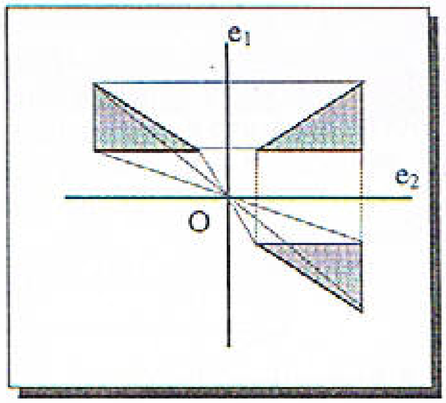
En la figura inicial se trazan paralelas al eje a una distancia $\dfrac{\overline{MMo}}{2}$ y las intersecciones con $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ serán los posibles M y M'.

6. EJERCICIOS

1) Se consideran los cuadrados ABED y BCFE de lado común $\overleftrightarrow{BE}$, horarios.
   a) Hallar la antitraslación Ate, $\vec{u}$ que transforma la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{EB}$.
   b) Hallar el triángulo $\widehat{PNM}$ tal que, $\widehat{PNM}= AT_{\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CF}} \circ Ate, \vec{u}\,(\widehat{ADE})$
   c) Hallar la antitraslación $ATe_1,\vec{v}$ tal que $ATe_1,\vec{v}\,(\widehat{PNM})= \widehat{BED}$
   d) Calcular perím.y área del pentágono (ACNPD) en función del lado del cuadrado.
2) Se consideran dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ de centros O y O_1 de modo que $\mathscr{C}_1= ATe,\vec{u}\,(\mathscr{C})$ Hallar el eje (e), sabiendo únicamente la longitud del vector $\vec{u}$, igual a 4.
3) Se dan una cfa. $\mathscr{C}$ y un ángulo exterior $\widehat{a,b}$ (b entre a y $\mathscr{C}$). Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo e isósceles con A∈ a, C∈ $\mathscr{C}$, (b) paralela media del triángulo y $\overline{AB}$=k , cte.
4) Dadas dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ y dos puntos A∈ $\mathscr{C}$ y A_1∈ $\mathscr{C}_1$ no alineados con los centros
   a) Determinar eje (e) y vector $\vec{u}$ de la antitraslación que transforma $\overleftarrow{OA}$ en $\overleftarrow{O_1A_1}$
   b) Sean P_1=Ate, $\vec{u}$ (P) con P∈ $\mathscr{C}$. Hallar el par de puntos P,P_1 de máxima distancia entre si.
   c) Hallar el par Q,Q_1 que disten una medida dada $\overline{QQ_1}$=k y calcular d (Q,e)
5) Sea un triángulo $\widehat{RST}$ y una recta (e) exterior. Un punto A varía en el contorno del RST. Se construyen los rectángulos ABCD con $\overline{AB}$ =k cte.y (e) paralela media del rectángulo. Hallar el lugar geométrico de C.
6) Sea (e) una recta y $\vec{u}$ un vector de igual direccion que (e) de medida u = 3
   a) Hallar el lugar geométrico de los puntos P, tal que , $\overline{PP_1}$=5,con P_1=Ate,$\vec{u}$ (P).
   b) Generalizar para $\vec{u}$ cualquiera y $\overline{PP1}$= k , k mayor que el módulo de $\vec{u}$.

CAPITULO 8

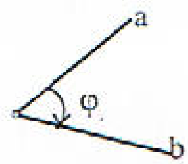
COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE ISOMETRIAS



1.- ROTACIÓN

1.1. Composición

La composición de dos simetrías axiales de ejes secantes, es una rotación, cuyo centro es el punto de intersección de los ejes y el ángulo de giro es el doble del que determinan los ejes, en el sentido del primer al segundo eje.



Hipótesis $a \cap b=\{0\}$ Tesis $S_b \circ S_a = R_{O,2\vec{\varphi}}$

$\widehat{aOb} = \vec{\varphi}$

Demostración

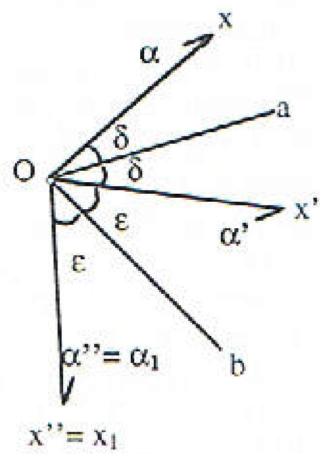
Veamos como se comporta una terna $(O, \overline{Ox}, \alpha)$ en ambas transformaciones.

Por definición de rotación, se cumplirá que:

$R_{O,2\vec{\varphi}}: (O,\overline{Ox},\alpha) \rightarrow (O,\overline{Ox_1},\alpha_1)$, con $\widehat{xOx_1} = 2\vec{\varphi}$

En la composición de las simetrías axiales se cumplirá:

$$\begin{array}{ccccc} & S_a & & S_b & \\ O & \longrightarrow & O & \longrightarrow & O \\ \overline{Ox} & \longrightarrow & \overline{Ox'} & \longrightarrow & \overline{Ox''} \\ \alpha & \longrightarrow & \alpha' & \longrightarrow & \alpha'' \end{array}$$



Sean $\widehat{xOa} = \delta$ y $\widehat{x'Ob} = \vec{\varepsilon}$

Considerando que $\overline{Oa}$ es bz.del $\widehat{xOx'}$ y $\overline{Ob}$ es bisectriz del $\widehat{x'Ox''}$, se cumplirá que $\widehat{xOx''} = \vec{\delta}+\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}+\vec{\varepsilon}$ y como $\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}=\vec{\varphi}$ (ver figura), tenemos que $\widehat{xOx''} = 2\vec{\varphi}$ por lo que $\overline{Ox''}$ debe coincidir con $\overline{Ox_1}$, pues $\widehat{xOx_1} = 2\varphi$.

Además como la simetría axial es una isometría indirecta; la composición de dos simetrías axiales, es directa al igual que la rotación, de donde deben coincidir los semiplanos α'' y α_1. Resumiendo; ambas isometrías realizan la misma transfomación $(O,\overline{Ox},\alpha) \rightarrow (O,\overline{Ox_1},\alpha_1)$ y como por axioma la isometría que efectua dicha transformación es única, resulta que $S_b \circ S_a = R_{O,2\vec{\varphi}}$, como se quería demostrar.

1.2 Descomposición

Recíprocamente se cumple que toda rotación se puede descomponer en dos simetrías axiales; de infinitas maneras posibles; con las condiciones de que los ejes se corten en el centro de giro y que determinen un ángulo igual a la mitad, del ángulo de rotación.

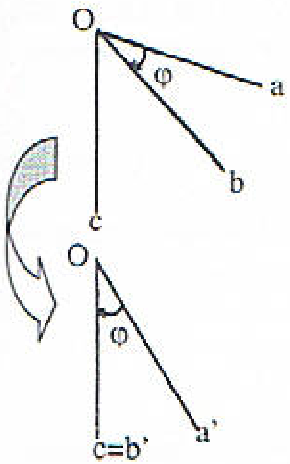
1.3 Aplicación

La composición de tres simetrías axiales de ejes concurrentes, es una simetría axial cuyo eje contiene al punto de intersección.

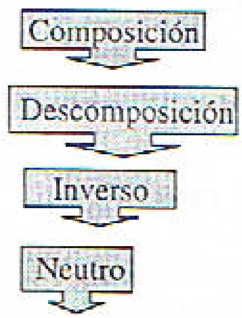
Demostración

En primer lugar haremos la composición de dos de las simetrías (S_a y S_b), resultando una rotación ($R_{O,2\vec{\varphi}}$); a la cual descompondremos en otras dos simetrías axiales ($S_{a'}$ y Sb') de modo que uno de los ejes, (b'), coincida con el eje (c) pues, como la simetría axial es involutiva; aplicada dos veces da como resultado la identidad.

Veamos a continuación el desarrollo



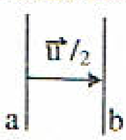
$$f = S_c \circ S_b \circ S_a$$
$$f = S_c \circ R_{O,2\vec{\varphi}}$$
$$f = S_c \circ S_{b'} \circ S_{a'}$$
$$f = I \circ S_{a'}$$
$$f = S_{a'}$$



2. TRASLACION

2.1 Composición

La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos, es una traslación, cuyo vector tiene como características: 1) dirección perpendicular a los ejes,
2) sentido del primer al segundo eje,
3) módulo igual al doble de la distancia entre los ejes.



Hipótesis : $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$ Tesis : $S_b \circ S_a = T_{2\overrightarrow{AB}}$

Demostración

Se analizará a continuación , el comportamiento de la terna (A, $\overline{AB}$, α) en ambas transformaciones.

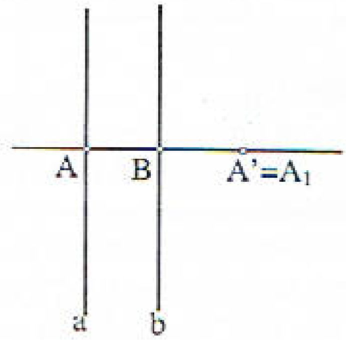
La traslación efectuará las siguientes transformaciones :

$T_{2\overrightarrow{AB}}$: (A, $\overline{AB}$, α) $\rightarrow$ (A_1, op.($\overline{A_1A}$), α), siendo B punto medio de $\overline{AA_1}$.

En la composición de las simetrías se cumple que :

$$\begin{array}{ccccc} & S_a & & S_b & \\ A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' \\ \overline{AB} & \longrightarrow & op.(\overline{AB}) & \longrightarrow & op.(\overline{A'A}) \\ \alpha & \longrightarrow & \alpha & \longrightarrow & \alpha \end{array}$$

Como B también es punto medio de $\overline{AA'}$; A_1 y A' deben coincidir, por lo que ambas isometrías realizan las mismas transformaciones; y como por axioma, esta isometría es única, se deduce la igualdad de la tesis.



2.2 Descomposición

Toda traslación puede descomponerse en dos simetrías axiales de infinitas formas posibles, con las condiciones, de que los ejes sean perpendiculares a la dirección del vector, la distancia entre ellos sea igual a la mitad del módulo del vector y el sentido igual al de la traslación, de modo que el eje de la primer simetría que se aplica, preceda al restante en dicho sentido.

2.3 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la composición de tres simetrías axiales de ejes paralelos, es igual a una simetría axial, cuyo eje es paralelo a los anteriores.

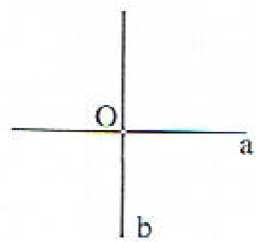
3. SIMETRIA CENTRAL

3.1 Composición

La composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares, es igual a una simetría central, cuyo centro es el punto de intersección de los ejes.

Hipótesis : $a \perp b$, $a \cap b = \{O\}$

Tesis : $S_b \circ S_a = C_O$



Demostración

La demostración es análoga a la efectuada en rotación.

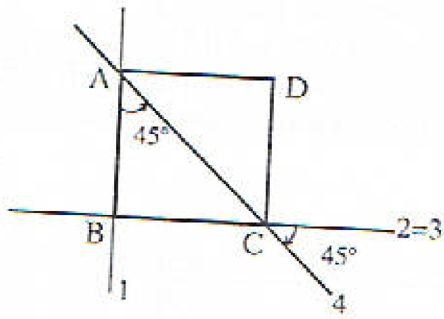
3.2 Descomposición

Recíprocamente se cumple que toda simetría central puede descomponerse como dos simetrías axiales; de infinitas formas posibles, con la condición de que los ejes sean perpendiculares en el centro de simetría.

3.3 EJEMPLO

En un cuadrado ABCD, (sentido antihorario), hallar en forma canónica, la isometría f, tal que $f = R_{C,-90°} \circ C_B$

En primer lugar se descomponen la rotación y la simetría central, en simetrías axiales, cuyos ejes se ubicaran en la figura, intentando superponer ejes consecutivos, pues la composición de dos simetrías axiales de ejes coincidentes es la identidad.
Haremos coincidir los ejes 2 y 3. Es condición para el eje 2, que contenga a B y para el eje 3, que contenga a C, por lo que reuniendo ambas condiciones, los ejes deben pasar por B y C, de donde los ubicamos en la figura y los anotamos 2=3
Ubicaremos a continuación los ejes 1 y 4.
El eje 1 debe ser perpendicular al eje 2 por el punto B y el 4 debe formar con el eje 3 la mitad del ángulo de giro,(-45°).
Obsérvese que el eje 3 debe preceder al 4 en el sentido horario. Finalmente la isometría f queda determinada por la composición de las simetrías S_1 y S_4,con las siguientes características :
$1 \cap 4 = \{A\}$ y $\widehat{1,4} = 45°$ en sentido antihorario, ya que la semirrecta inicial es 1 y la final es 4, (ver figura). Se deduce entonces que f es una rotación de centro A y ángulo 90° en sentido antihorario , pues el ángulo es el doble del formado por los ejes.



$f = R_{C,-90°} \circ C_B$ — Descomposición

$f = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$ — Identidad

$f = S_4 \circ I \circ S_1$ — Neutro

$f = S_4 \circ S_1$ — Composición

$f = R_{A,+90°}$

3.4 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la composición de dos simetrías centrales de distinto centro es igual a una traslación, cuyo vector es igual al doble del vector que determinan los centros, en el sentido del primero al segundo, o sea $C_B \circ C_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$

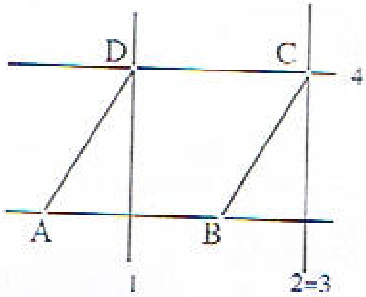
3.5 Aplicación

La composición de tres simetrías centrales de centros no alineados, es igual a otra simetría central, de centro el cuarto vértice del paralelogramo, que los tres centros anteriores, ordenadamente determinan.

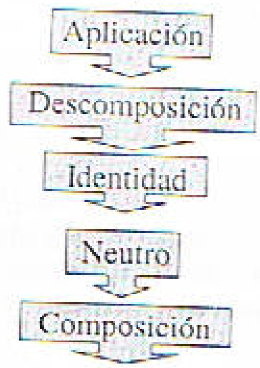
<u>Demostración</u>

Se demostrará que $C_C \circ C_B \circ C_A = C_D$, siendo ABCD un paralelogramo.

- En primer lugar aplicando el ejercicio teórico anterior se componen las simetrías centrales C_B y C_A, resultando la traslación $T_{2\overrightarrow{AB}}$.
- En la descomposición de la traslación se ubican los ejes de modo que el segundo contenga a C, (ver figura).
- Como $1 \perp AB$ y $4 \parallel AB$ se deduce que $1 \perp 4$. Sea D la intersección de estos ejes.
- Considerando que $d(1,2) = \overline{AB} = \overline{DC}$ y que $DC \parallel AB$, se deduce que D es el cuarto vértice del paralelogramo.



$$f = C_C \circ C_B \circ C_A$$
$$f = C_C \circ T_{2\overrightarrow{AB}}$$
$$f = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$$
$$f = S_4 \circ I \circ S_1$$
$$f = S_4 \circ S_1$$
$$f = C_D$$



3.6 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la composición de tres simetrías centrales C_A, C_B y C_C de centros alineados, es igual a una simetría central de centro D, alineado con los anteriores y tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

4. ANTITRASLACION

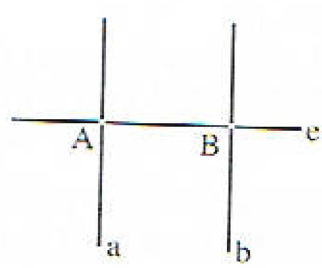
4.1 Composición

La composición de tres simetrías axiales, tal que, los ejes de dos de ellas sean paralelos y el tercero perpendicular a ambos, es una antitraslación.

Hipótesis : $a \parallel b$, $a \perp e$, $a \cap e = \{A\}$, $b \cap e = \{B\}$

Tesis : $S_e \circ S_b \circ S_a = AT_{e,2\overrightarrow{AB}}$

Demostración



Si se componen las simetrías de ejes paralelos en una traslación, se obtiene que $S_e \circ S_b \circ S_a = S_e \circ T_{2\overrightarrow{AB}}$ y aplicando la definición de antitraslación se cumplirá que $S_e \circ T_{2\overrightarrow{AB}} = AT_{e,2\overrightarrow{AB}}$. La propiedad también es válida cuando la composición se efectúa en el orden, $S_b \circ S_a \circ S_e$.

4.2 Descomposición

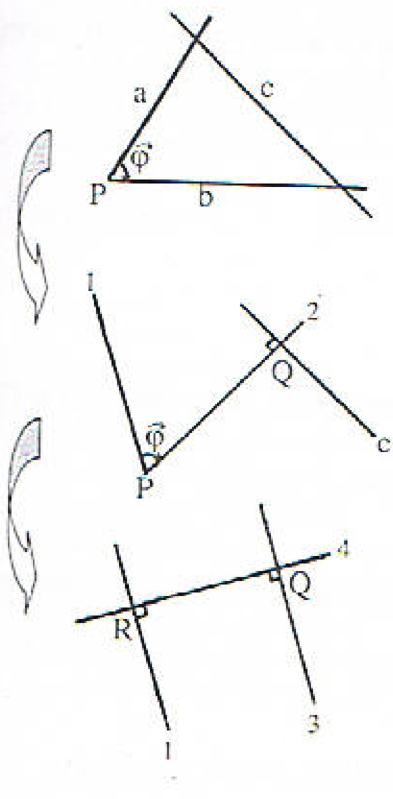
Toda antitraslación puede descomponerse en tres simetrías axiales, de infinitas formas posibles, de modo que uno de los ejes coincida con el eje de la simetría axial de la definición, y los otros dos restantes, sean perpendiculares a éste y cumplan que la distancia entre ellos, sea igual a la mitad del módulo del vector de la definición, y en el mismo sentido.

4.3 Aplicación

La composición de tres simetrías axiales de ejes secantes dos a dos, es una antitraslación.

Demostración

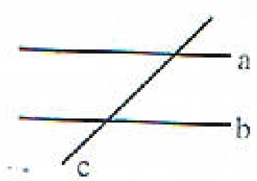
Sea $\{P\} = a \cap b$. En primer lugar se componen las simetrías de ejes (a) y (b) en una rotación de centro P, y a continuación se descompone ésta en dos simetrías con la condición de que uno de los ejes, (2), quede perpendicular al eje restante (c), (ver figura). Sea $2 \cap c = \{Q\}$.Seguidamente, se componen las simetrías de ejes perpendiculares en una simetría central de centro Q, con la condición de que uno de los ejes quede perpendicular al eje restante, o sea $4 \perp 1$,lo que implica que $1 \parallel 3$. Si $4 \cap 1 = \{R\}$ se puede afirmar que la composición de las simetrías axiales de ejes 1, 3 y 4 es una antitraslación de eje RQ y vector $2\overrightarrow{RQ}$. Veamos a continuación el desarrollo.



$$f = S_c \circ S_b \circ S_a$$
$$f = S_c \circ R_{P,2\vec{\varphi}}$$
$$f = S_c \circ S_2 \circ S_1$$
$$f = C_Q \circ S_1$$
$$f = S_4 \circ S_3 \circ S_1$$
$$f = S_{RQ} \circ T_{2\overrightarrow{RQ}}$$
$$f = AT_{RQ,2\overrightarrow{RQ}}$$

4.4 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la composición de tres simetrías axiales con dos ejes paralelos y uno secante, es una antitraslación.



5. COMPOSICIONES NOTABLES DETERMINADAS

Existen algunas composiciones notables determinadas, que es útil tener presente para la resolución de problemas de composición de isometrías. A continuación se exponen las más relevantes.

- Dos simetrías centrales

Su composición es una traslación de vector el doble del determinado por los centros. $\Longrightarrow$ $C_B \circ C_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$

- Tres simetrías centrales de centros no alineados

Su composición es una simetría central de centro el cuarto vértice del paralelogramo. $\Longrightarrow$ $C_C \circ C_B \circ C_A = C_D$

- Tres simetrías centrales de centros alineados A, B y C

Su composición es una simetría central de centro D, alineado con los anteriores, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Longrightarrow$ $C_C \circ C_B \circ C_A = C_D$

- Dos traslaciones

Su composición es una traslación de vector igual a la suma de los ~~vectores~~ anteriores. $\Longrightarrow$ $T_{\vec{V}} \circ T_{\vec{U}} = T_{\vec{U}+\vec{V}}$

- Dos rotaciones de igual centro

Su composición es una rotación de igual centro y ángulo igual ala suma de los ángulos orientados iniciales. $\Longrightarrow$ $R_{O,\vec{\beta}} \circ R_{O,\vec{\alpha}} = R_{O,\overrightarrow{\alpha+\beta}}$

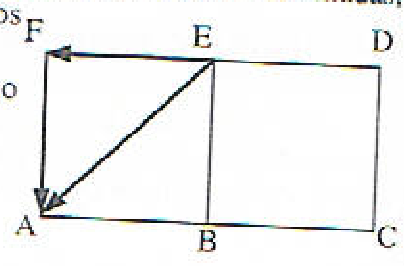
- Simetría axial con traslación de vector paralelo al eje

Es una antitraslación con eje el de la simetría y vector el de la traslación. $\Longrightarrow$ $T_{\vec{U}} \circ Se = ATe,_{\vec{U}}$

5.1 EJEMPLO

Sean ABEF y BCDE los cuadrados de la figura. Hallar en forma canónica la isometría $f = T_{\overrightarrow{DC}} \circ T_{\overrightarrow{EF}} \circ C_D \circ C_B \circ C_A$

Obsérvese que en este ejercicio, hay dos composiciones notables determinadas, ellas son la composición de tres simetrías de centros no alineados, A,B y D, que es igual a la simetría central de centro el cuarto vértice del paralelogramo $C_D \circ C_B \circ C_A = C_E$, y la composición de dos traslaciones, cuyo resultado es la traslación de vector, la suma de los iniciales , o sea $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA}$, de donde $T_{\overrightarrow{DC}} \circ T_{\overrightarrow{EF}} = T_{\overrightarrow{EA}}$

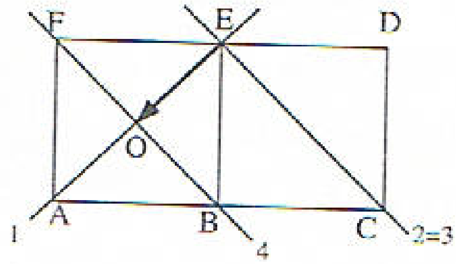


Resolveremos ahora

$$f = T_{\overrightarrow{EA}} \circ C_E$$

$$f = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

$$f = S_4 \circ I \circ S_1 \Rightarrow f = S_4 \circ S_1$$



En primer lugar, se descomponen la traslación y la simetría central en simetrías axiales, de modo de hacer coincidir el eje 2 con el eje 3 como indica la figura.

Es condición para el eje 2 que pase por E , y para el eje 3 que sea perpendicular a la recta EA. Reuniendo ambas condiciones los ejes 2 y 3 deben coincidir con la recta EC.

A continuación se ubicarán los ejes 1 y 4. El eje 1 debe ser perpendicular al 2 por el punto E, y el 4 debe ser paralelo al eje 3, a una distancia igual a la mitad del módulo del vector, o sea $\overline{EO}$, y el eje 3 debe preceder al 4, en el sentido del vector $\overrightarrow{EO}$.

En estas condiciones el eje 4 coincide con la recta BF y el 1 con AE. Dichas rectas se cortan en el centro O del cuadrado en forma perpendicular, por lo que se concluye que la isometría f, es la simetría central de centro O.

$$f = S_4 \circ S_1 \Rightarrow f = C_O$$

6. ECUACIONES CON ISOMETRIAS.

Para resolver ecuaciones con isometrías, se debe considerar que en general, la composición de isometrías <u>no</u> es conmutativa .

Así mismo, recordemos que la composición de una isometría con su inversa, en cualquier orden, da como resultado la identidad.

Se adjunta una tabla con isometrías inversas, útil para la resolución de este tipo de problemas.

f	f^{-1}
$T_{\vec{U}}$	$T_{-\vec{U}}$
$R_{O,+\alpha}$	$R_{O,-\alpha}$
C_O	C_O
Se	Se
$ATe,_{\vec{U}}$	$ATe,_{-\vec{U}}$

6.1 EJEMPLO

En un cuadrado ABCD de centro O y sentido horario, hallar en forma canónica la isometría f tal que se cumpla $T_{\overrightarrow{BC}} \circ f \circ C_A = S_{AB}$

En primer lugar, se procede a hallar la solución a la ecuación anterior, como se detalla a continuación :

$T_{\vec{BC}} \circ f \circ C_A = S_{AB}$

Composición con inverso de C_A

$T_{\vec{BC}} \circ f \circ C_A \circ C_A = S_{AB} \circ C_A$

Inverso

$T_{\vec{BC}} \circ f \circ I = S_{AB} \circ C_A$

Neutro Identidad

$T_{\vec{BC}} \circ f = S_{AB} \circ C_A$

Composición con inverso de $T_{\vec{BC}}$

$T_{\vec{CB}} \circ T_{\vec{BC}} \circ f = T_{\vec{CB}} \circ S_{AB} \circ C_A$

Inverso

$I \circ f = T_{\vec{CB}} \circ S_{AB} \circ C_A$

Neutro Identidad

$f = T_{\vec{CB}} \circ S_{AB} \circ C_A$

Descomposición

$f = T_{\vec{CB}} \circ S_{AB} \circ S_2 \circ S_1$

Inverso

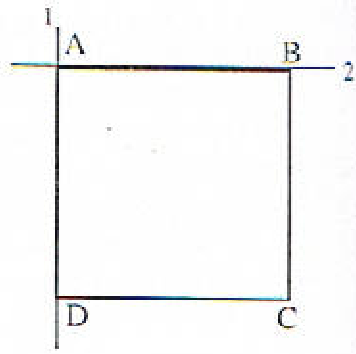
$f = T_{\vec{CB}} \circ I \circ S_1$

Neutro identidad

$f = T_{\vec{CB}} \circ S_1$

Composición

$f = AT_{\vec{AD},\vec{CB}}$



7. TEOREMA DE REDUCCION DE ISOMETRIAS

Toda isometría del plano se reduce a alguna de las siguientes : identidad , simetría axial, rotación, simetría central, traslación o antitraslación.

Demostración

Demostraremos a continuación la proposición anterior, estudiando el número de puntos unidos de las isometrías del plano .

- **Isometrías con al menos tres puntos unidos no alineados**

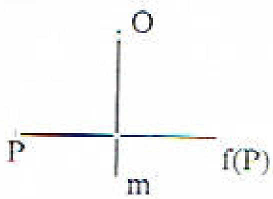
  Toda isometría que deja unidos al menos tres puntos no alineados es la identidad (I)
  Sea la isometría f y los puntos A,B,C no alineados tal que f(A) =A, f(B)=B y f(C)=C. Consideremos ahora un punto cualquiera P del plano, distinto de los anteriores y su imagen f(P).
  Supongamos por absurdo que P es distinto de f(P).
  Considerando que las isometrías conservan las distancias se cumplirá que :
  $\overline{AP} = \overline{f(A)f(P)} = \overline{Af(P)}$, $\overline{BP} = \overline{f(B)f(P)} = \overline{Bf(P)}$, $\overline{CP} = \overline{f(C)f(P)} = \overline{Cf(P)}$,
  es decir que los puntos A,B y C equidistan de los puntos P y f(P), de donde pertenecen a su mediatriz; lo cual contradice la hipótesis que afirma que los puntos no están alineados .
  Es absurdo entonces, suponer que $P \neq f(P)$, y en consecuencia todos los puntos se transforman en si mismos, es decir que la isometría f es la identidad.

▫ Isometrías con al menos dos puntos unidos

Ya se ha demostrado (capítulo 2, numeral 8.4) que toda isometría con dos puntos unidos, deja unidos a todos los puntos de la recta que ellos determinan.
En el caso de que exista otro punto unido exterior a la recta mencionada, la isometría buscada es la identidad.
En el caso de que no exista ningún otro punto unido, exterior a la recta determinada por los dos puntos iniciales, la isometría es la simetría axial de eje la recta mencionada anteriormente.

▫ Isometrías con un único punto unido

Si una isometría tiene únicamente un punto unido entonces es una rotación , o una simetría central de centro, en ambos casos, el punto unido.
Sea la isometría f y el punto O tal que f(O) = O. Sea un punto P distinto de O, entonces $P \neq f(P)$, pues no puede ser unido.
Como $\overline{OP} = \overline{f(O)f(P)} = \overline{Of(P)}$, se deduce que O pertenece a la mediatriz del segmento determinado por los puntos P y f(P) ; sea (m). Consideremos la simetría axial S_m , y la composición $S_m \circ f = g$

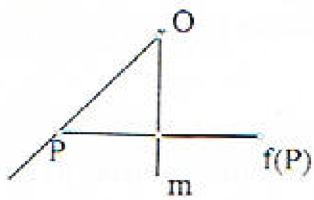


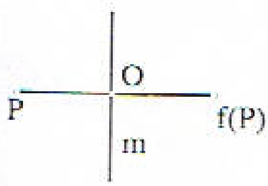
$$O \xrightarrow{f} O \xrightarrow{S_m} O$$

$$P \longrightarrow f(P) \longrightarrow P$$

Como la isometría g tiene dos puntos unidos, es la identidad o la simetría axial de eje OP.
* Si $g = I \Rightarrow S_m \circ f = I \Rightarrow f = S_m$, lo cual es absurdo, pues contradice la hipótesis que establece que f tiene un solo punto fijo.

* Si $g = S_{OP} \Rightarrow S_m \circ f = S_{OP} \Rightarrow f = S_m \circ S_{OP}$
De donde la composición de las simetrías axiales anteriores es una rotación de centro O.





Para el caso en que O es el punto medio del segmento determinado por los puntos P y f(P) , resulta que f es la simetría central de centro O.

▫ Isometrías sin puntos unidos

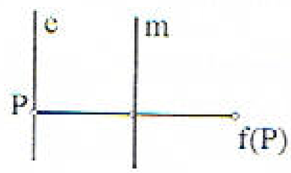
Demostraremos que en este caso la isometría f , se reduce a una traslación o a una antitraslación .

Sea un punto P cualquiera del plano y f(P) su imagen en la isometría, y sea (m) la mediatriz del segmento determinado por los puntos P y f(P). Consideremos además la composición $S_m \circ f = g$.

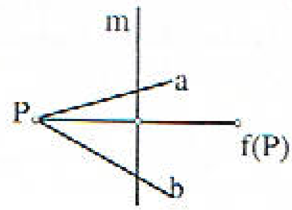
$P \xrightarrow{f} f(P) \xrightarrow{S_m} P$ Se tiene entonces que P es unido en la composición g.
Existen tres alternativas posibles :

i) $g = I \Rightarrow S_m \circ f = I \Rightarrow f = S_m$, lo cual resulta absurdo pues f no tiene puntos unidos

ii) g es una simetría axial , tal que su eje (e) pasa por P, entonces $g = S_e \Rightarrow S_m \circ f = S_e \Rightarrow f = S_m \circ S_e$, la única opción para que no existan puntos unidos es que $m \parallel e$ y $m \neq e$, de donde resulta la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos, o sea una traslación.



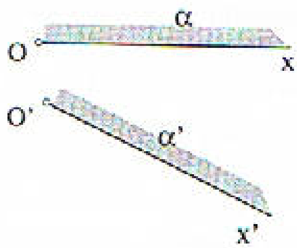
iii) g es una rotación o una simetría central de centro P. En ambos casos se puede descomponer la isometría en la composición de dos simetrías axiales de ejes concurrentes en el punto P .
Sea $g = S_b \circ S_a \Rightarrow S_m \circ f = S_b \circ S_a \Rightarrow f = S_m \circ S_b \circ S_a$
La composición de tres simetrías axiales de ejes no concurrentes , ni todos paralelos, es una antitraslación. (ver en este capítulo 4.3 y 4.4).



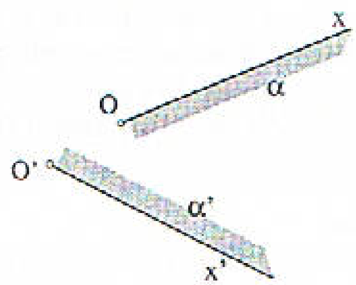
8. IDENTIFICACION DE ISOMETRIAS DADAS DOS TERNAS CORRESPONDIENTES

Sea la terna $(O, \overline{Ox}, \alpha)$ y su imagen $(O', \overline{O'x'}, \alpha')$ en la isometría f. Analizaremos las distintas posiciones de ambas ternas en el plano, con el propósito de identificar la isometría que las hace corresponder.

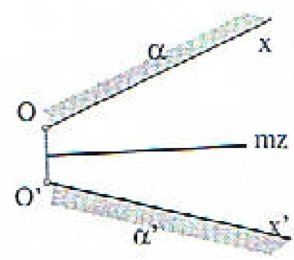
1. Semirrectas no paralelas de distinto origen.



ISOMETRÍA DIRECTA
· Rotación : para determinar centro y ángulo, ver capítulo 6 , nº 5.

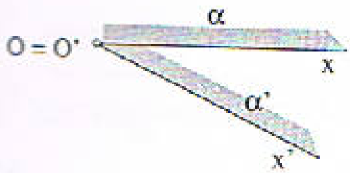


ISOMETRÍA INDIRECTA
Antitraslación : para determinar eje y vector, ver capítulo 7 , nº 3.

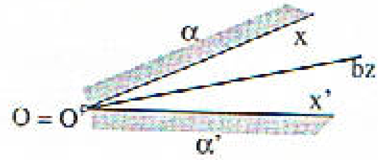


ISOMETRÍA INDIRECTA
Si la mediatriz del segmento $\overline{OO'}$ coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{x, x'}$, la isometría es una Simetría axial de eje la mediatriz

2. Semirrectas no paralelas de igual origen.

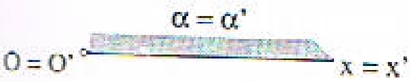


ISOMETRÍA DIRECTA
Rotación de centro O y ángulo $x\hat{O}x'$



ISOMETRÍA INDIRECTA
Simetría axial de eje la recta que contiene la bisectriz del ángulo $x\hat{O}x'$

3. Semirrectas paralelas, colineales, de igual origen e igual sentido.

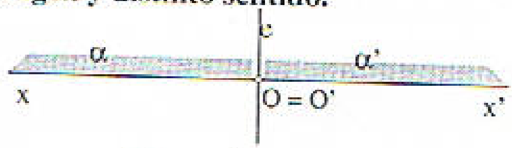


ISOMETRÍA DIRECTA
Identidad

ISOMETRÍA INDIRECTA
Simetría axial de eje determinado por las semirrectas coincidentes

4. Semirrectas paralelas, colineales, de igual origen y distinto sentido.

ISOMETRÍA DIRECTA
Simetría central de centro O



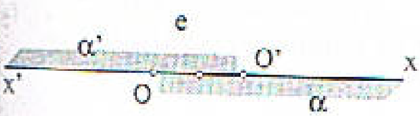
ISOMETRÍA INDIRECTA
Simetría axial de eje (e) perpendicular a las semirrectas por el origen

5. Semirrectas paralelas, colineales, de distinto origen e igual sentido.

ISOMETRÍA DIRECTA
Traslación de vector $\overrightarrow{OO'}$

ISOMETRÍA INDIRECTA
Antitraslación de eje OO' y vector $\overrightarrow{OO'}$

6. Semirrectas paralelas, colineales, de distinto origen y distinto sentido.

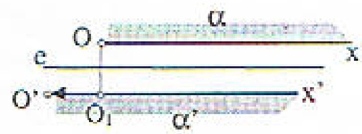


ISOMETRÍA DIRECTA
Simetría central de centro el punto medio del segmento $\overline{OO'}$

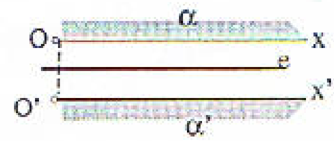
ISOMETRÍA INDIRECTA
Simetría axial de eje (e) perpendicular a la recta OO', por el punto medio del segmento $\overline{OO'}$

7. Semirrectas paralelas, no colineales, de igual sentido.

ISOMETRÍA DIRECTA
Traslación de vector $\overrightarrow{OO'}$

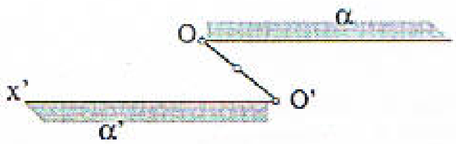


ISOMETRÍA INDIRECTA
Antitraslación de eje la paralela media, y vector $\overrightarrow{O_1O'}$ siendo O_1 la proyección de O sobre la recta que contiene a $\overrightarrow{O'x'}$

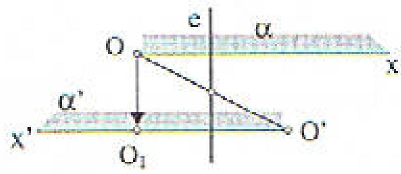


ISOMETRÍA INDIRECTA
Si la recta OO' es perpendicular a las semirrectas, entonces la isometría es la simetría axial de eje la paralela media (e).

8. Semirrectas paralelas, no colineales, de distinto sentido.



ISOMETRÍA DIRECTA
Simetría central de centro el punto medio de $\overline{OO'}$



ISOMETRÍA INDIRECTA
Antitraslación de eje perpendicular a las semirrectas por el punto medio de OO' y vector $\overrightarrow{OO_1}$ siendo O_1 la proyección de O.

9. EJERCICIOS

1. En un cuadrado ABCD de sentido horario y centro O, hallar en forma canónica las siguientes isometrías:

   a) $f = C_A \circ C_O$ b) $f = C_C \circ T_{\overrightarrow{AC}}$ c) $f = R_{D,-90°} \circ R_{A,-90°}$
   d) $f = T_{2\overrightarrow{CB}} \circ R_{C,+90°}$ e) $f = T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ f) $f = T_{\overrightarrow{AC}} \circ T_{\overrightarrow{BA}}$
   g) $f = S_{AC} \circ C_B$ h) $f = C_O \circ AT_{AD,\overrightarrow{AD}}$
   i) $f = C_C \circ S_{BC}$ j) $f = S_{AD} \circ C_O$ k) $f = R_{D,-90°} \circ C_O$

2. En un triángulo $\widehat{ABC}$ equilátero y de sentido antihorario hallar la isometría f, tal que $f \circ R_{A,+120°} = R_{B,-120°}$

3. En un triángulo ABC equilátero y de sentido horario, hallar las isometrías f y g
   a) $f = R_{A,-60°} \circ S_{AC} \circ C_B$
   b) $g = S_{AC} \circ S_{BC} \circ C_C \circ C_A \circ C_B$

4. En un cuadrado ABCD de sentido horario y centro O, hallar las isometrías f_1, f_2 y f_3 tal que:
   a) $f_1 = R_{A,-90°} \circ T_{\overrightarrow{BC}}$
   b) $f_2 = f_1 \circ R_{C,+90°}$
   c) $f_3 = f_2 \circ R_{C,-90°}$

5. Hallar en forma canónica las isometrías f, efectuadas en un cuadrado ABCD de centro O y sentido antihorario :

a) $R_{C,+90°} \circ f = AT_{DB,\overrightarrow{DB}}$ b) $f \circ R_{C,+90°} = AT_{DB,\overrightarrow{DB}}$
c) $f \circ T_{\overrightarrow{BD}} = C_D \circ C_O$ d) $C_A \circ f \circ C_O = S_{BD}$
e) $f \circ T_{\overrightarrow{BA}} = C_D \circ C_O$ f) $f \circ AT_{AB,2\overrightarrow{BA}} = S_{BC}$
g) $f \circ R_{B,+90°} \circ R_{D,+90°} = Id$ h) $R_{O,+90°} \circ S_{BD} \circ f = T_{\overrightarrow{AB}}$

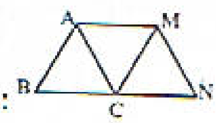
6. Sea ABCDEF un hexágono regular de sentido antihorario. Hallar la isometría f tal que : $f = S_{FD} \circ S_{AD} \circ S_{AB}$

7. Se considera un triángulo equilátero $\widehat{ABC}$ de sentido antihorario, y sean P,Q y R los pies de las alturas h_A,h_B y h_C respectivamente. Hallar la isometría f tal que $f = S_{RC} \circ S_{AB} \circ S_{BQ} \circ S_{AC} \circ S_{AP} \circ S_{BC}$

8. Se considera un triángulo equilátero $\widehat{ABC}$ de lado **x** , y de sentido horario.
a) Hallar la isometría f , tal que : $f \circ R_{A,+120°} = S_{AC}$
b) Sea C' = f (C). Hallar $\overline{CC'}$ en función de **x** .

9. Se considera un paralelogramo ABCD de sentido antihorario, con $\overline{AB} = 2a$, $\overline{AD} = a$, $\widehat{DAB} = 60°$, y M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.
a) Expresar en forma canónica f tal que $f = R_{D,-120°} S_{MN}$
b) Sea A'B'C'D' = f (ABCD). Hallar área del cuadrilátero A'D'BC
c) Sea (p) la perpendicular a AB por B. Expresar en forma canónica f_1 tal que : $f_1 = S_p \circ f$
d) Calcular la distancia de D a la recta A_1D_1 , siendo $A_1D_1 = f(AD)$.

10. Se considera la siguiente figura en la que $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACM}$ y $\widehat{CMN}$ son triángulos equiláteros congruentes. Determinar las isometrías que transforman el triángulo $\widehat{ABC}$ en los siguientes:



a) $\widehat{MCN}$ b) $\widehat{MNC}$ c) $\widehat{CNM}$ d) $\widehat{CMN}$ e) $\widehat{NMC}$ f) $\widehat{NCM}$

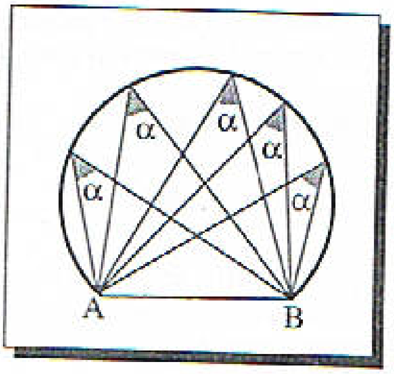
11. Sean ABED y EBCF dos cuadrados de lado común $\overleftrightarrow{BE}$ (sentido horario).
a) Hallar la isometría f_1 tal que f_1 (ABED) = EFBC
b) Hallar la isometría f_2 tal que f_2 (ABED) = CBEF
c) Hallar la isometría $f = f_2 \circ f_1$

12. Se consideran los hexágonos regulares ABCDEF y BAMNPQ de lado común AB, en sentido horario.
a) Hallar f_1 tal que f_1 (AMNPQB) = CDEFAB
b)) Hallar f_2 tal que f_2 (AMNPQB) = EDCBAF

13. Sea ABCD un cuadrado en sentido antihorario , M∈ $\overleftrightarrow{AD}$, P∈ $\overleftrightarrow{DC}$, tal que $\overline{AM} = \overline{DP}$ .Hallar la isometría f tal que f ($\widehat{ABM}$) = $\widehat{DAP}$

CAPITULO 9

LUGARES GEOMETRICOS FUNDAMENTALES



1. INTRODUCCIÓN

En primer lugar consideraremos las principales pautas para la resolución de ejercicios prácticos de lugar geométrico, para posteriormente estudiar en forma detallada, cada uno de los lugares geométricos fundamentales

1.1. Teoremas directo y recíproco

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen con cierta propiedad y, que determinan una figura.

Ante el análisis de un problema en el cual se afirma que $\mathscr{L}$ es el conjunto de los puntos que cumplen una propiedad y que se encuentran ubicados en una figura $\mathscr{F}$, debemos probar que :

1) todo punto que cumple la propiedad pertenece a la figura, $\forall X \in \mathscr{L} \Rightarrow X \in \mathscr{F}$, que llamaremos teorema directo

2) todo punto de la figura tiene la propiedad indicada, $\forall X \in \mathscr{F} \Rightarrow X \in \mathscr{L}$, que llamaremos teorema recíproco.

1.2. Limitación

En la demostración del teorema directo es frecuente llegar a la conclusión de que el lugar geométrico buscado está incluido en determinada figura. Puede suceder que toda la figura sea el lugar buscado , o solamente parte de ella cumpla con las condiciones del problema, por lo cual, se deben establecer los límites.

En general en todo problema de este tipo, aparece un **elemento variable principal**, del cual dependen las sucesivas construcciones. Este elemento varía entre posiciones límites, determinadas por el enunciado, y a cada una de estas ubicaciones corresponde un punto particular de la figura en la cual esta incluida el lugar geométrico. Dichos puntos son los límites del lugar.

1.3. Figura auxiliar de análisis

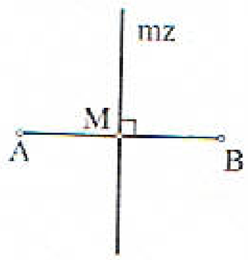
Si no se logra deducir en primera instancia el lugar geométrico en la figura principal, es conveniente efectuar una construcción auxiliar con al menos tres casos, la cual, proporcionará una idea de la naturaleza del lugar, que puede ser útil para la demostración.

1.4. Metodología

1) Se ubican los datos del problema en una figura principal
2) Si no se logra deducir en primera instancia el lugar; se construye una figura auxiliar con varios casos que ayudará a determinar el lugar geométrico.
3) Se demuestra el teorema directo en el cual se justifica que el lugar geométrico se encuentra en determinada figura, en base a las hipótesis del problema.
4) Se efectúa la limitación del lugar partiendo de las posiciones límites del elemento variable principal.
5) Se demuestra el teorema reciproco en el cual se construye una nueva figura que tenga los elementos fijos de los datos del problema y la figura hallada en el teorema directo. Aquí se demuestra que todo punto de la figura hallada cumple con las hipótesis del problema.

2. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento, es la recta perpendicular al mismo por su punto medio, llamada mediatriz.



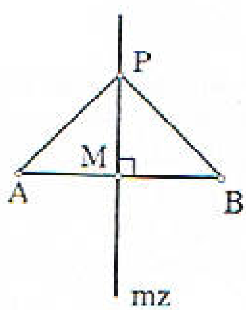
Demostración

Se demostrará en primer lugar que todo punto que equidista de A y B pertenece a la mediatriz, o sea que: $\overline{PA}=\overline{PB} \Rightarrow P \in mz$

Observemos que $AMP=BMP$ pues $\overline{AM}=\overline{MB}$ (M, punto medio), $\overline{PA}=\overline{PB}$ (hipótesis) y $\overline{PM}$ común, de donde aplicando el criterio L.L.L. se deduce la igualdad de los triángulos y en particular la de los ángulos $\widehat{AMP}=\widehat{BMP}$. Como éstos ángulos congruentes son adyacentes, entonces son rectos, por lo que $PM \perp AB$ y en consecuencia $P \in mz$.

Se probará a continuación que todo punto perteneciente a la mediatriz equidista de los extremos, o sea que: $P \in mz \Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}$.

Si $P \in mz$, entonces $\widehat{PMA}=PMB=90°$, además $\overline{PM}$ es común y $\overline{AM}=\overline{MB}$ (punto medio), por lo que aplicando el criterio de congruencia de triángulos LAL se deduce que $AMP=BMP$ y en particular la igualdad de sus lados $\overline{PA}=\overline{PB}$.



2.1. EJERCICIOS TEORICOS

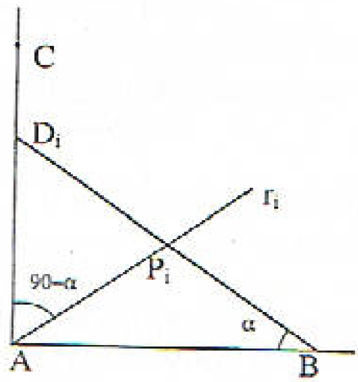
1) Demostrar que las tres mediatrices de un triángulo , se cortan en un punto (circuncentro).
2) Demostrar que por tres puntos no alineados pasa una y sólo una circunferencia.

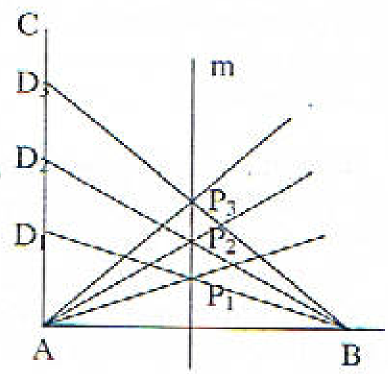
2.2 EJEMPLO

Sea un ángulo recto de vértice A y dos puntos B y C, ubicados uno en cada lado, tal que $\overline{AB}=\overline{AC}$. Sobre el segmento $\overline{AC}$ excluído A, se considera un punto D variable y sea $\widehat{ABD}=\alpha$. Por A se traza la semirrecta $\overline{Ar}$ tal que $\widehat{DAr}=90-\alpha$, y que corta a BD en P.Hallar el lugar geométrico de P al variar D.

Directo

En primer lugar ubicamos los datos del problema en una figura principal , y a continuación en una figura auxiliar, efectuamos varios casos, en donde se observa que el punto P parece variar sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ .Como $\widehat{DPA}=90°-\alpha$, entonces $\widehat{PAB}=\alpha$, por ser ángulo complementario, por lo cual el triángulo $\widehat{APB}$ tiene dos ángulos iguales, y en consecuencia es isósceles, de donde $\overline{PA}=\overline{PB}$, y entonces P pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$.



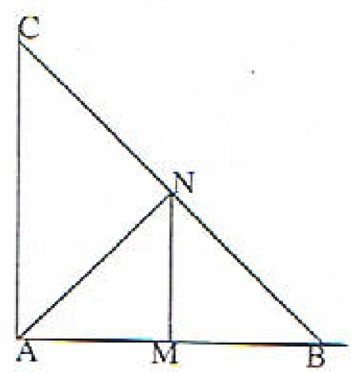


Limitación

Se analizaran las posiciones extremas del elemento variable principal D. Sean M punto medio de $\overline{AB}$ y N de $\overline{BC}$. Cuando D tiende a C, observamos que P tiende a N y cuando D tiende a A, P tiende a M.

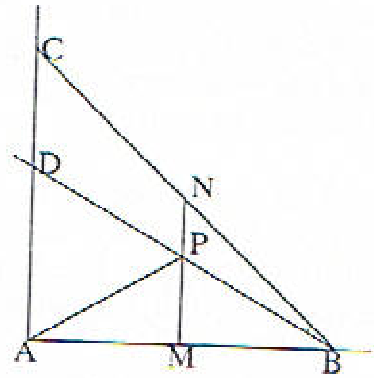
Resumiendo, si: D $\rightarrow$C entonces P$\rightarrow$N
D $\rightarrow$ A entonces P$\rightarrow$M

En consecuencia la figura limitada es el segmento MN, excluído M.



Recíproco

Para la demostración del teorema recíproco, ubicamos los datos fijos del problema,($\widehat{ABC}$), y la figura hallada en el teorema directo, ($\overline{MN}$). Se demostrará que para todo punto del segmento $\overline{MN}$, se cumplen las hipótesis iniciales del problema.



Como P es un punto interior del ángulo $\widehat{ABC}$, la semirrecta $\overline{BP}$ (rayo interior del ángulo), cortará al segmento $\overline{AC}$,que tiene sus extremos sobre los lados del ángulo, en un punto D. Además, como P pertenece a laa mediatriz de $\overline{AB}$, se cumple que $\overline{AP}=\overline{BP}$, por lo cual , el triángulo $\widehat{ABP}$ es isósceles y en consecuencia isoángulo; por lo que $\widehat{PBA}=\widehat{PAB}=\alpha$. Considerando que el ángulo $\widehat{DPA}$ es complementario del $\widehat{PAB}$, se cumple que $\widehat{DPA}=90^{\circ}-\alpha$; verificándose entonces las hipótesis iniciales del problema.

Se concluye que el lugar geométrico de P, es el segmento $\overline{MN}$, e incluido en la mediatriz de $\overline{AB}$, tal que M no pertenece al lugar.

3. BISECTRIZ DE UN ANGULO

3.1 Proyección de un punto sobre una recta

Definición

Llamamos proyección de un punto P sobre una recta (r), al punto P', intersección de la recta con la perpendicular trazada desde el punto a ésta.

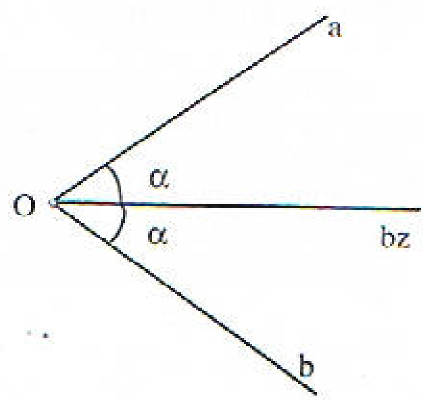
3.2 Distancia punto – recta

Definición

Llamamos distancia entre un punto P y una recta (r), a la longitud del segmento determinado por el punto P y su proyección P'

$$d\,(P,r) = \overline{PP'}$$

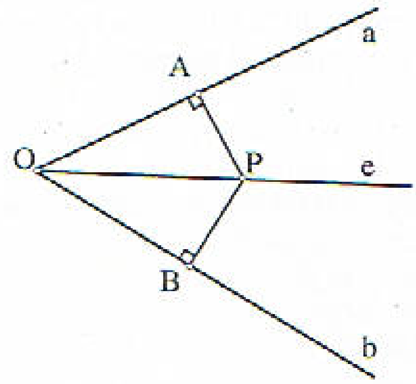
3.3 La bisectriz como lugar geométrico



El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo convexo, es la semirrecta interior que determina con los lados dos ángulos iguales; llamada bisectriz.

Demostración

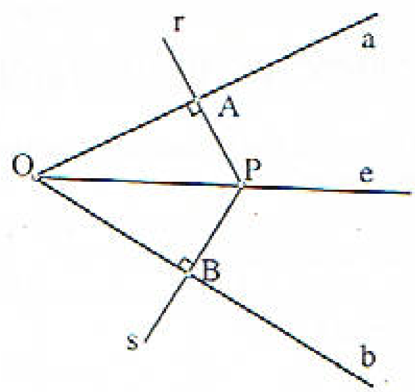
Sea $\widehat{aOb}$ un ángulo convexo y $\overline{Oe}$ su bisectriz . Se demostrará en primer lugar que si P equidista de (a) y (b), entonces pertenece a la bisectriz, o sea que :
$d(P,a)=d(P,b) \Rightarrow P \in \overline{Oe}$



Sean A y B las proyecciones de P sobre (a) y (b) . Por el criterio de congruencia de triángulos L.L.A. podemos afirmar que $OPA=OPB$,pues $\overline{OP}$ es común, $\overline{AP}=\overline{BP}$ (hipótesis) y $\widehat{PAO}=\widehat{PBO}=90°$. Se deduce entonces que $\widehat{AOP}=\widehat{BOP}$ y por lo tanto P pertenece a la bisectriz $\overline{Oe}$ ya que determina ángulos iguales con los lados.

Se probará a continuación que si P pertenece a la bisectriz , entonces equidista de los lados, o sea que : $P \in \overline{Oe} \Rightarrow d(P,a)=d(P,b)$

Sean (r) y (s) las perpendiculares a (a) y (b) por P, $r \cap a=\{A\}$ y $s \cap b=\{B\}$. La simetría axial de eje (e),realiza las siguientes transformaciones : $P \to P$,$\overline{Oa} \to \overline{Ob}$ y $r \to s$, pues la perpendicularidad se conserva en las isometrías ,de donde se deduce que
$r \cap a \to s \cap b$,es decir que A se transforma en B, y por consiguiente $\overline{AP} \to \overline{BP}$, de donde $\overline{PA}=\overline{PB}$ y entonces $d(P,a)=d(P,b)$

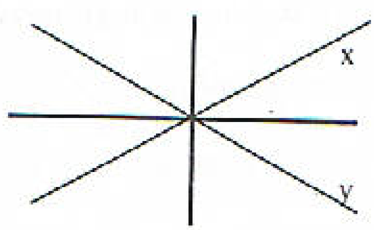


3.4 EJERCICIO TEORICO

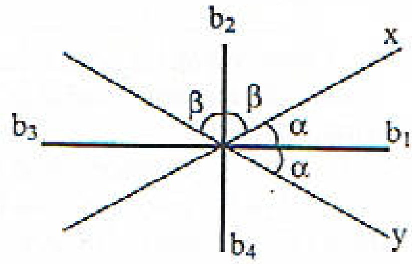
Demostrar que las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto.

3.5 Unión de bisectrices

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas secantes (x) e (y), es el conjunto unión de dos rectas perpendiculares entre sí, que contienen las bisectrices de los cuatro ángulos determinados por las rectas iniciales.



Demostración



El conjunto unión de los cuatro ángulos convexos que las rectas (x) e (y) determinan, es el plano. Entonces si b_1, b_2, b_3, b_4, son las respectivas bisectrices se cumplirá que :

$$\{ P: d(P;x) = d(P,y) \} = b_1 \cup b_2 \cup b_3 \cup b_4 .$$

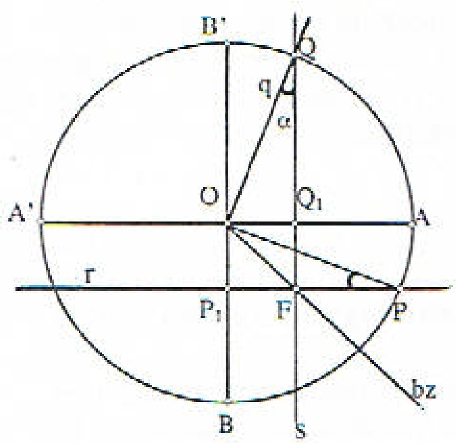
Además si consideramos uno de estos ángulos $\widehat{xOy}$ igual a 2α, (ver figura) y uno de sus adyacentes igual a 2β, se observa que son suplementarios , o sea $2\alpha+2\beta=180°$, por lo cual $\alpha+\beta=90°$ cumpliéndose que b_1 y b_2 serán lados de un ángulo recto, de donde se deduce la perpendicularidad del enunciado.

3.6 EJEMPLO

Sea una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y dos diámetros perpendiculares $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Se considera un punto P variable en el arco menor AB y por O se traza (q), perpendicular a OP , que corta a la cfa. en Q. Por P se traza (r) paralela a AA' y por Q se traza (s) paralela a BB' . Hallar el lugar geométrico de F, intersección de (r) con (s).

Directo

Si el lector efectúa al menos tres casos en una figura auxiliar, podrá constatar que F parece variar sobre la bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$. Se demostrará entonces que F equidista de las rectas (OA) y (OB). Sean $\{Q_1\} = s \cap AA'$ y $\{P_1\} = r \cap BB'$.



Los triángulos $\widehat{OP_1P}$ y $\widehat{OQ_1Q}$ son congruentes como se verá a continuación :

si $Q_1\widehat{O}P=\alpha$, entonces $Q\widehat{O}Q_1=90°-\alpha$ de donde $Q\widehat{O}Q_1=P\widehat{O}P_1$ y como $OQ=OP$ (radios)y $O\widehat{Q_1}Q=O\widehat{P_1}P=90°$, aplicando el criterio de congruencia de triángulos A.L.A. se cumple la afirmación inicial.

Entonces $\overline{OQ_1}=\overline{OP_1}$ y como $r \perp s$, la figura OQ_1FP_1 es un cuadrado, de donde se deduce que $\overline{FP_1}=\overline{FQ_1}$,o sea que $d(F,OA)=d(F,OB)$, concluyéndose que $F \in bz\ (\widehat{AOB})$.

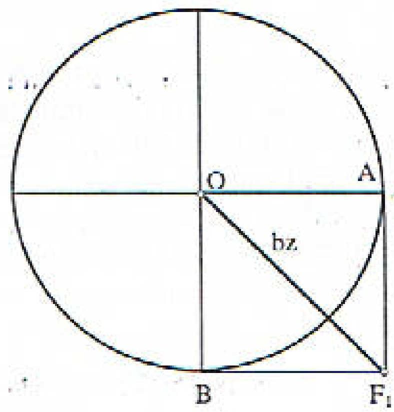
Limitación

Observemos las posiciones límites del elemento variable principal P :

Si $P \rightarrow A$ entonces $F \rightarrow O$

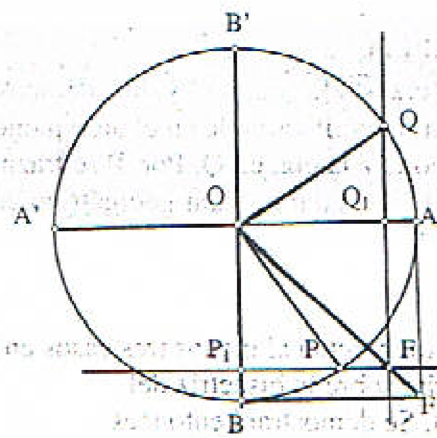
Si $P \rightarrow B$ entonces $F \rightarrow F_1$, siendo F_1 el cuarto vértice del cuadrado $AOBF_1$

Se concluye que la figura limitada es el segmento $\overline{OF_1}$.



Recíproco

Sean $F \in \overline{OF_1}$ y la cfa. $\mathscr{C}$.
Por F se trazan las rectas (r) y(s) con las condiciones iniciales obteniéndose los puntos P, P_1, Q, Q_1. Al demostrar que $\widehat{POQ}$ es recto queda demostrado el recíproco. Se observa que los triángulos $\widehat{OQQ_1}$ y $\overline{OPP_1}$ son congruentes, pues $\overline{OP}=\overline{OQ}$ (radios), $O\widehat{Q_1}Q=O\widehat{P_1}P=90°$ y $\overline{OQ_1}=\overline{OP_1}$ (OQ_1FP es cuadrado), entonces en particular también serán congruentes sus ángulos $P\widehat{O}P_1=Q\widehat{O}Q_1$.

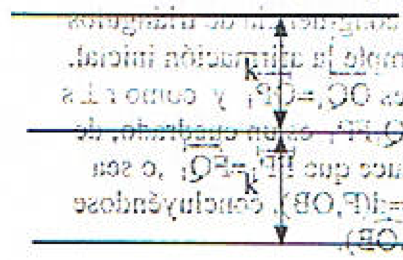


Si $Q_1\widehat{O}P=\alpha$ se cumple que $P\widehat{O}P_1+\alpha=90°$, por lo que $Q\widehat{O}Q_1+\alpha=90°$ de donde se deduce que $OP \perp OQ$, que era lo que se quería demostrar.

El lugar geométrico de F, es el segmento $\overline{OF_1}$ incluido en la bisectriz del ángulo AOB.

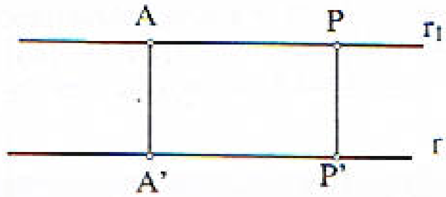
4. UNION DE PARALELAS

El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una distancia k, de una recta (r), es el conjunto unión de dos rectas paralelas a (r), distantes de ella la longitud k, una en cada semiplano de borde (r)



Demostración

Se trabajará en un solo semiplano siendo la demostración para el semiplano opuesto análoga. Sea un punto A situado a una distancia k de (r), A' su proyección sobre (r) y (r_1) la paralela a (r) por A.



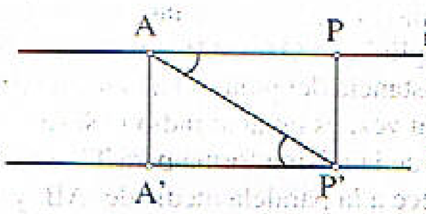
Se probará en primer lugar que : $\forall P \in r_1 \Rightarrow d(P,r)=k$

Sea P' la proyección de P sobre (r). En la traslación de vector $\overrightarrow{AP}$, las rectas AA' y (r) se transforman de la siguiente manera : AA' $\rightarrow$ PP' (pues AA' $\parallel$ PP'), $r \rightarrow r$ (recta doble) y por lo tanto A' $\rightarrow$ P' (intersecciones de las rectas anteriores)

Concluimos que $\overline{AA'} \rightarrow \overline{PP'}$, de donde sus longitudes son iguales y como PP'=d(P,r) entonces se cumplirá que d(P,r)=k.

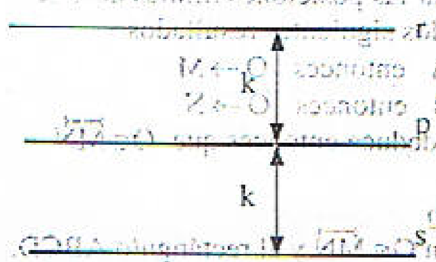
Se probará a continuación que : $d(P,r)=k \Rightarrow P \in r_1$

Observemos que los triángulos $\widehat{AA'P}$ y $\widehat{P'PA}$ son congruentes pues AA'=PP' (medida k), $A\widehat{A'}P'=P'\widehat{P}A=90°$ y AP' es un lado común; entonces aplicando el cuarto criterio de congruencia de triángulos L.L.A., se deduce la afirmación inicial; y en particular la congruencia de los ángulos $P\widehat{A}P'$ y $A\widehat{P'}P$. Como dichos ángulos son alternos internos, se cumplirá que AP $\parallel$ r, y como por A existe una sola paralela a (r), entonces $P \in r_1$.



5. PARALELA MEDIA ENTRE PARALELAS

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas, es una recta paralela a ambas, situada a igual distancia de ellas.

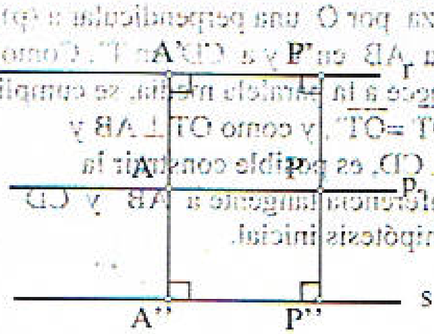


Demostración

Sea un punto A situado a igual distancia de (r) y de (s), A' y A'' sus proyecciones sobre ellas y (p) la recta paralela a ambas por A. En primer lugar demostraremos que:

$$\forall P \in p \Rightarrow d(p,r) = d(P,s)$$

Razonando igual que en el teorema anterior, si se considera la traslación de vector $\overrightarrow{AP}$,



se deduce que $\overline{AA'}=\overline{PP'}$ y $\overline{AA''}=\overline{PP''}$, y como $\overline{AA'}=\overline{AA''}$ se concluye que $\overline{PP'}=\overline{PP''}$, de donde $d(P,r)= d(p,s)$

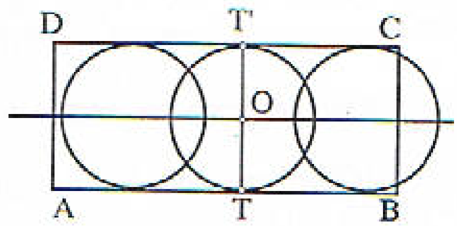
Recíprocamente es posible probar que si $d(P,r)= d(P,s) \Rightarrow P\in p$

La demostración es análoga al recíproco del teorema anterior, por lo que, de la misma forma ,se llega a la conclusión de que AP es paralela a (r) y (s) , y como por A existe una sola paralela a ambas, entonces $P\in p$

5.1 EJEMPLO

Se consideran el rectángulo ABCD y las circunferencias tangentes a AB y CD en T y T '. Hallar el lugar geométrico de los centros de las cfas. al variar T en el segmento $\overline{AB}$.

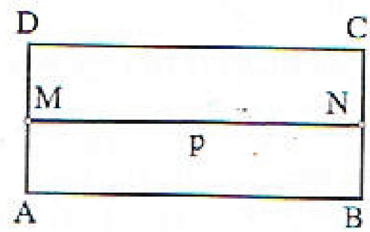
Directo



Si se efectúa una figura auxiliar con varios casos, el centro O parece variar en la paralela media de las rectas AB y DC.

Como la cfa. es tangente a AB en T se cumplirá que $OT \perp AB$, entonces $\overline{OT}$ es la distancia del punto O a la recta AB, que a su vez, es igual al radio r. Si se razona de la misma forma para T' , se concluye que d(O,AB)=d(O,CD) , por lo que O pertenece a la paralela media de AB y CD , que llamaremos (p).

Limitación



Sean los siguientes puntos :

$\{N\}= p\cap BC$ y $\{M\}= p\cap AD$

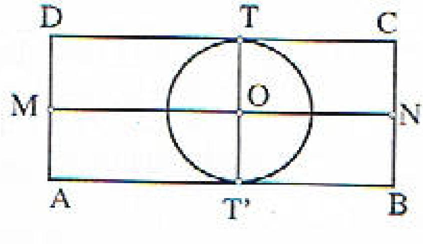
Al analizar las posiciones límites de T se obtienen los siguientes resultados :

si $T\rightarrow A$ entonces $O\rightarrow M$

si $T\rightarrow B$ entonces $O\rightarrow N$

Se deduce entonces que $O\in \overline{MN}$

Recíproco



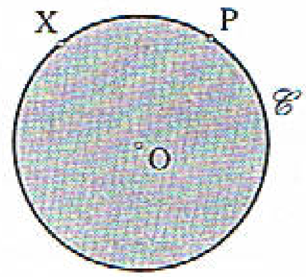
Sean $O\in \overline{MN}$ y el rectángulo ABCD. Se traza por O una perpendicular a (p) que corta a AB en T y a CD en T'. Como O pertenece a la paralela media, se cumplirá que $\overline{OT} =\overline{OT'}$, y como $OT\perp AB$ y $OT' \perp CD$, es posible construir la circunferencia tangente a AB y CD de la hipótesis inicial.

Se concluye que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias es el segmento $\overline{MN}$, incluido en la paralela media de las rectas AB y CD.

6. CIRCUNFERENCIA

Recordemos la definición de circunferencia de centro O y radio **r** :
" conjunto de puntos del plano que distan una longitud **r**, de un punto O ".
Se demostrará en primer lugar que

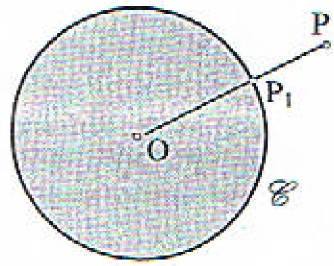
si $P \in \mathscr{C} \Rightarrow \overline{OP} = r$



Sea la cfa. $\mathscr{C}$ determinada por el centro O y un punto X tal que $\overline{OX} = r$
Si P pertenece a dicha cfa. se cumplirá que $\overline{OX} = \overline{OP} = r$, de donde resulta la tesis.

Se demostrará a continuación que si
$\overline{OP} = r \Rightarrow P \in \mathscr{C}$

Para ello demostraremos el contrarrecíproco, por lo cual, se supone por absurdo, que existe un punto P no perteneciente a la cfa. $\mathscr{C}$ tal que $\overline{OP} = r$. Sea $\{ P_1 \} = \overrightarrow{OP} \cap \mathscr{C}$.
Como $P_1 \in \mathscr{C}$, entonces $\overline{OP_1} = r$ (directo).
Por el axioma métrico podemos afirmar que el punto P_1 es el único punto de la semirrecta que dista la medida r de O, entonces $\overline{OP} \neq r$ en contra de la hipótesis , por lo cual, es absurdo suponer que $P \notin \mathscr{C}$



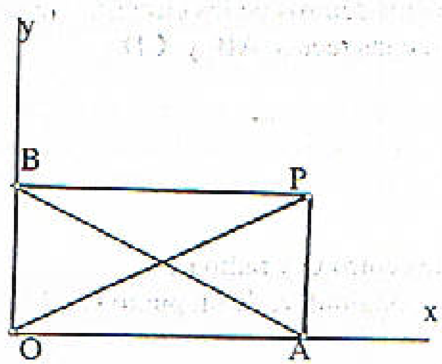
Se concluye que el lugar geométrico de los puntos del plano, que distan una longitud **r** de un punto O, es la circunferencia de centro O y radio r.

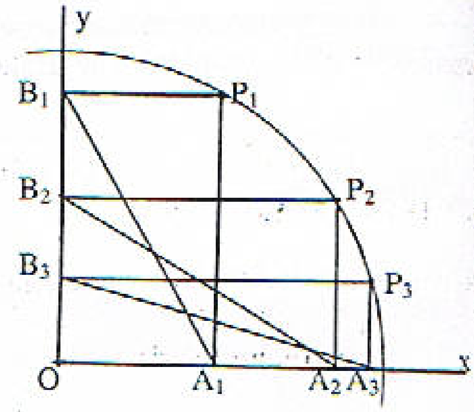
6.1 EJEMPLO

Se consideran un ángulo recto $\widehat{xOy}$ y un segmento variable $\overline{AB}$ de longitud constante k con A perteneciente a $\overrightarrow{Ox}$ y B a $\overrightarrow{Oy}$. Sea P el cuarto vértice del rectángulo BOAP. Hallar el lugar geométrico del punto P al variar $\overline{AB}$

Directo

En primer lugar ubicamos los datos del problema en una figura principal de análisis y a continuación se construye una figura auxiliar con varios casos, en la cual se observa, que el punto P parece variar en una circunferencia de centro O.

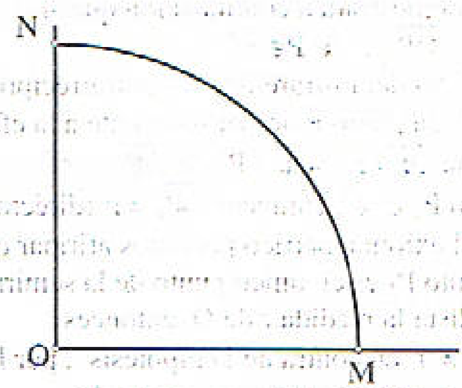




Como OAPB es un rectángulo, sus diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{OP}$ son iguales ya que los triángulos $\widehat{AOB}$ y OAP son congruentes, pues tienen $\overline{DA}$ común, $\widehat{BOA}=\widehat{OAP}=90°$ y $\overline{BO}=\overline{PA}$, (criterio L.A.L.). Se deduce entonces que $\overline{OP}$= k y como O es fijo, P variará en una cfa. de centro O y radio k, que llamaremos $\mathscr{C}$.

Limitación

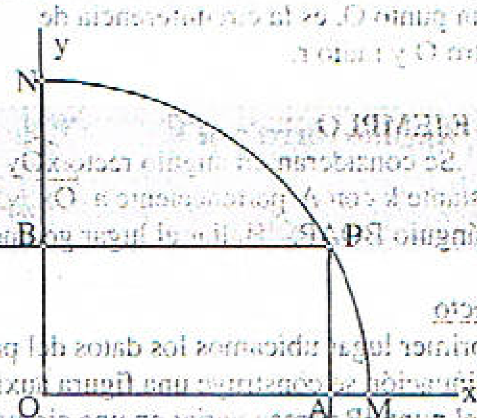
Se analizarán las posiciones límites del elemento variable principal $\overline{AB}$. Sean M y N las intersecciones de la cfa. con los lados del ángulo. Las posiciones extremas del segmento $\overline{AB}$, se generan cuando el punto A coincide con el origen O, observándose que en dicho caso B=N; y cuando B coincide con O, entonces A=M. En ambos casos no es posible construir el rectángulo Resumiendo la figura limitada es el arco MN excluidos sus extremos.



Recíproco

Para la demostración del recíproco, ubicamos en una figura los datos fijos del problema, vale decir el $x\widehat{O}y$, y la figura hallada en el teorema directo, arco MN.

Se demostrará que todo punto P del arco cumple con las hipótesis iniciales, por lo cual, por P se trazan perpendiculares a los lados del ángulo, resultando los puntos A y B. El cuadrilátero OAPB, así determinado es un rectángulo, de donde $\overline{OP}=\overline{AB}$. Como P pertenece al arco MN y éste está incluido en la circunferencia de centro O y radio k se cumple que $\overline{OP}$= k, de donde $\overline{AB}$ = k.



Resumiendo para todo punto P del arco se cumple que OAPB es un rectángulo con $A \in \overline{Ox}$, $B \in \overline{Oy}$ y $\overline{AB} = k$, hipótesis iniciales del problema.

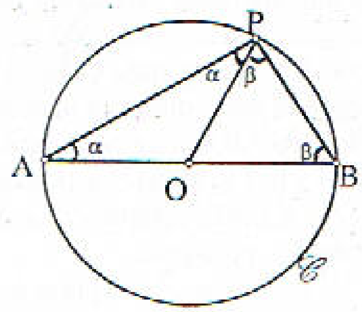
Podemos afirmar entonces que el lugar geométrico de P es el arco abierto $\widehat{MN}$.

7. LUGAR GEOMETRICO DE THALES

El lugar geométrico de los puntos del plano, vértices de los ángulos rectos, cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y B es la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, excluidos sus extremos, llamada lugar geométrico de Thales.

Demostración

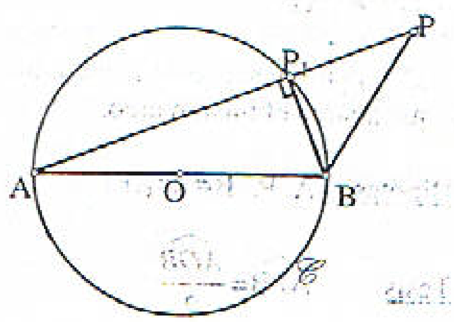
Se probará en primer lugar que si $P \in \mathscr{C}_{\overline{AB}} - \{A,B\} \Rightarrow \widehat{APB} = 90°$



Sean $\widehat{APO} = \alpha$ y $\widehat{BPO} = \beta$, siendo O el centro de la cfa.. Como los triángulos $\widehat{AOP}$ y $\widehat{BOP}$ son isoscéles se cumple que $\widehat{PAO} = \alpha$ y $PBO = \beta$. La suma de los ángulos del $\widehat{APB}$ es $2\alpha + 2\beta = 180°$, de donde $\alpha + \beta = 90°$ y como $\widehat{APB} = \alpha + \beta$, entonces $\widehat{APB} = 90°$

Se demostrará a continuación que si $\widehat{APB} = 90° \Rightarrow P \in \mathscr{C}_{\overline{AB}} - \{A,B\}$

Se demostrará el contrarrecíproco por lo que suponemos por absurdo, que existe P no perteneciente a la cfa. y tal que $APB = 90°$. Sea $\{P_1\} = \overline{AP} \cap \mathscr{C}$. Por el teorema del ángulo externo se cumplirá que $\widehat{AP_1B} > \widehat{APB}$ y como $\widehat{AP_1B} = 90°$, pues pertenece a la cfa. ,entonces $\widehat{APB} < 90°$ lo cual contradice la hipótesis. Razonando en forma análoga para P interior a la cfa. ($\widehat{APB} > 90°$),concluímos que P debe pertenecer a la circunferencia.



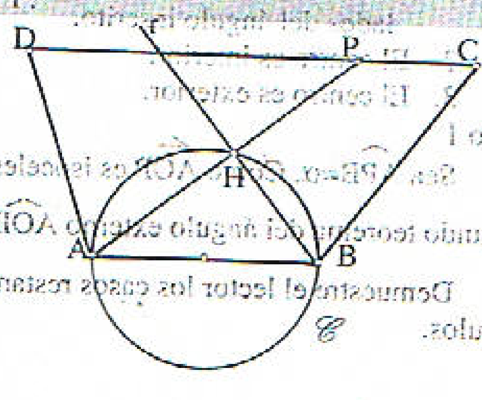
7.1 EJEMPLO

Se considera el trapecio ABCD de la figura y un punto P variable en $\overline{CD}$. Por B se traza la perpendicular (r) a $\overline{AP}$ que la corta en H.

Hallar el lugar geométrico de H al variar P.

Directo

Los puntos H son vértices de ángulos rectos cuyos lados pasan por puntos fijos A y B, por lo cual H varía en el lugar geométrico de Thales, es decir, la cfa de diámetro $\overline{AB}$ excluidos sus extremos que llamaremos $\mathscr{C}$.



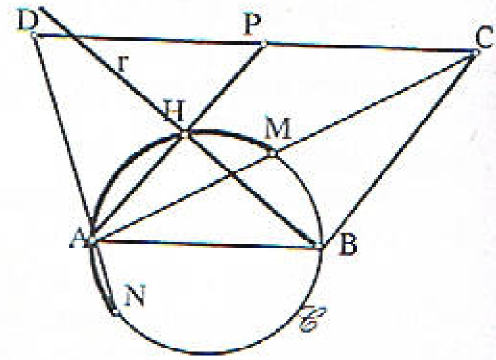
Limitación

Sean M=AC$\cap\mathscr{C}$ y N=AD$\cap\mathscr{C}$. Se analizará como varía el elemento principal P.

Si P$\rightarrow$C entonces H$\rightarrow$M

Si P$\rightarrow$D entonces H$\rightarrow$N

La figura limitada es el arco $\widehat{MN}$ excluido A.



Recíproco

En primer lugar ubicamos los datos fijos del problema (trapecio ABCD) y la figura hallada (arco $\widehat{MN}$). Para todo H perteneciente al arco excepto A, se determina la recta AH que corta a $\overline{CD}$ en P. Como H pertenece al arco, que esta incluido en la cfa de diámetro $\overline{AB}$ se cumple que A$\widehat{H}$B=90° (Thales) y por lo tanto H y B determinan la recta (r), r$\perp$AP, cumpliéndose las hipótesis iniciales del problema.

Se concluye que el lugar geométrico de H es el arco $\widehat{MN}$, excepto A, incluido en la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

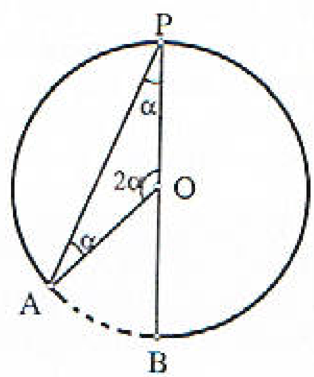
8. ARCO CAPAZ

8.1. Teorema previo sobre ángulos inscritos

Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo al centro, que abarca el mismo arco.

Hipótesis A, P, B$\in\mathscr{C}_{O,r}$

Tesis $\widehat{APB}=\dfrac{\widehat{AOB}}{2}$



Demostración

Consideraremos 3 casos :

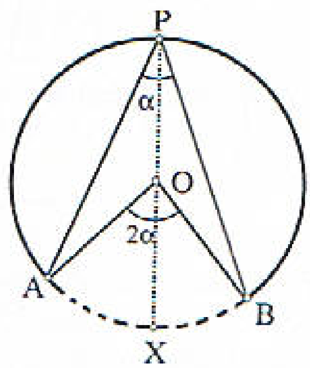
1. El centro pertenece a uno de los lados del ángulo inscrito.
2. El centro es interior.
3. El centro es exterior.

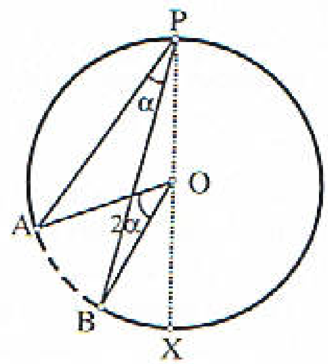
Caso 1

Sea $\widehat{APB}=\alpha$. Como $\widehat{AOP}$ es isóceles se cumple que $\widehat{PAO}=\alpha$ y aplicando el segundo teorema del ángulo externo $\widehat{AOB}=2\alpha$, de donde: $\widehat{APB}=\dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

Demuestre el lector los casos restantes, aplicando el caso 1 y suma y resta de ángulos.

Sugerencia: Considere un punto X auxiliar, intersección de la recta PO con la circunferencia $\mathscr{C}$.





8.2 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar directo y recíproco de la siguiente proposición: en una circunferencia cualquiera a ángulos inscritos congruentes corresponden arcos congruentes

2) Demostrar que la bisectriz de todo ángulo convexo inscrito en una circunferencia corta al arco abarcado en su punto medio.

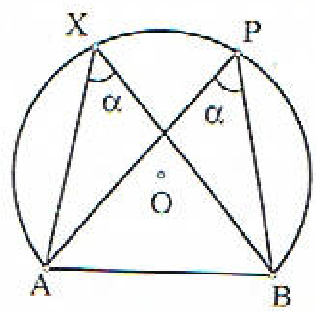
8.3 EL ARCO CAPAZ COMO LUGAR GEOMETRICO

El lugar geométrico de los puntos del plano que son vértices de ángulos congruentes con uno dado, y cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y B en uno de los semiplanos de borde AB, es un arco de circunferencia de extremos A y B excluidos éstos.

Notación: $\mathscr{A}_{\overrightarrow{AB},\alpha}$

Demostración

Sean $\widehat{AXB}=\alpha$, $\mathscr{A}$ el arco determinado por dichos puntos, y O su centro. Se demostrará en primer lugar que si:



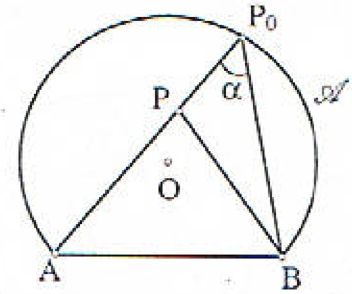
$P\in\mathscr{A} \Rightarrow \widehat{APB}=\alpha$

Como $\widehat{AXB}=\widehat{AOB}/2$ y $\widehat{APB}=\widehat{AOB}/2$ (ángulos al centro en común), se cumplirá que $\widehat{AXB}=\widehat{APB}=\alpha$

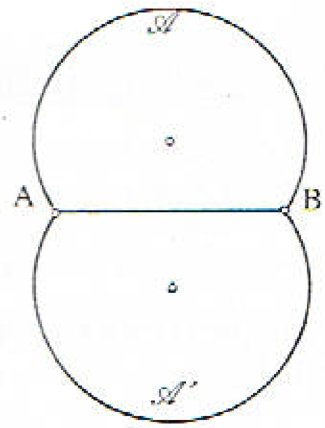
Se demostrará a continuación que si

$\widehat{APB}= \alpha \Rightarrow P\in \mathscr{A}$

Demostraremos el contrarrecíproco, por lo cual se supone por absurdo, que existe un punto P no perteneciente al arco y tal que $\widehat{APB}=\alpha$. Supongamos P interior al arco, y sea P_0 la intersección de $\overline{AP}$ con el arco. Como $P_0\in \mathscr{A}$ entonces $\widehat{AP_0B}=\alpha$.



Si se aplica el teorema del ángulo externo en el triángulo BPP_0, se cumple que $\widehat{APB}>\widehat{AP_0P}$, por lo que se deduce que $\widehat{APB}>\alpha$, en contradicción de la hipótesis inicial ($\widehat{APB}= \alpha$). Se razona análogamente para P exterior al arco,(resultando $\widehat{APB}<\alpha$), de donde se concluye que $P\in \mathscr{A}$, pues es absurdo suponer que el punto no pertenezca al arco.



8.4 UNION DE ARCOS

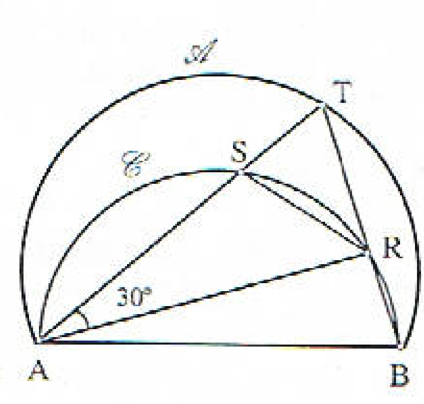
Si se consideran los dos semiplanos de borde AB, podemos afirmar que el lugar geométrico de los puntos del plano, que cumplen las condiciones ya mencionadas, es la unión de dos arcos capaces, situados uno en cada semiplano.

$$\{ P\in \pi : \widehat{APB} = \alpha \} = \mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$$

8.5 EJEMPLO Se considera una semicircunferencia $\mathscr{C}$, de diámetro $\overline{AB}$, y en ella una cuerda variable $\overline{RS}$, tal que $\widehat{RAS}=30°$, con el cuadrilátero ABRS en sentido antihorario. Sea el punto T, la intersección de las rectas AS y BR. Hallar el lugar geométrico de T, al variar RS.

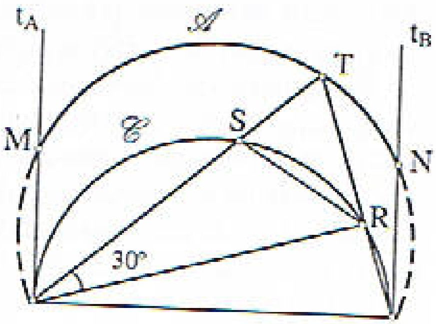
<u>Directo</u>

Como $\widehat{ART}=90°$,(L.G. de Thales) y $\widehat{RAT}=30°$, entonces $\widehat{ATR}=60°$, por lo cual los puntos T son vértices de ángulos de medida constante y cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y B, por lo que T varía en el arco capaz de segmento $\overline{AB}$ y 60°. Sea $\mathscr{A}$.



Limitación

Se analizarán las posiciones extremas del elemento variable principal ,o sea la cuerda $\overline{RS}$. Cuando S=A, la recta AS se transforma en la tangente a $\mathscr{C}$ por A. Sea t_A y M su intersección con el arco. Observemos que en dicho caso no se genera el ángulo $\widehat{SAR}$, pues S coincide con A.

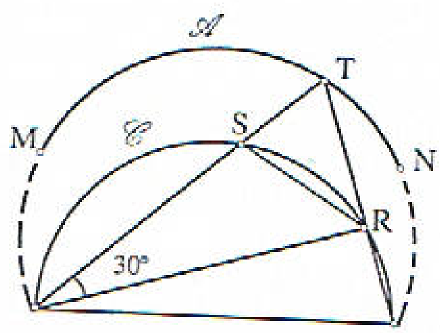


Así mismo, cuando R=B, la recta RB, se transforma en la tangente a $\mathscr{C}$ por B, que llamaremos t_B , y sea N su intersección con $\mathscr{A}$. Se concluye entonces que la figura limitada es el arco $\widehat{MN}$, excluido el punto M

Recíproco

En una figura se ubican la semicfa. de diámetro $\overline{AB}$ y el arco $\widehat{MN}$. Se demostrará que para todo punto T del arco se cumplen las hipótesis iniciales .

T determina con A y B rectas que cortan a $\mathscr{C}$ en S y R. Como R∈ $\mathscr{C}$ entonces $\widehat{ART}$=90°, y como T∈ $\mathscr{A}$ entonces $\widehat{ATR}$=60°. Se deduce en el triángulo $\overset{\triangle}{ART}$ que el ángulo $\widehat{RAT}$=30° y por consiguiente $\widehat{RAS}$=30°, como se quería probar.



En conclusión ,el lugar geométrico de T, es el arco $\widehat{MN}$ (excluido M),que se encuentra incluido en el arco capaz $\mathscr{A}_{\overline{AB},60°}$.

9. EJERCICIOS

1) Se considera una cfa. de diámetro $\overline{AB}$ y un punto C variable de ella. Sobre la semirrecta opuesta a $\overline{CA}$, se toma P, tal que $\overline{AC}=\overline{CP}$.
   a)Demostrar que $\widehat{ACB}=\widehat{BCP}$
   b)Lugar geométrico de P
2) Sea un ángulo recto $x\widehat{O}y$ fijo y un segmento $\overline{AB}$ variable con A∈ $\overline{Ox}$ y B∈ $\overline{Oy}$, de longitud constante k.
   a)Lugar geométrico del punto medio de $\overline{AB}$
   b)Por A y B se trazan perpendiculares a $\overline{Ox}$ y a $\overline{Oy}$. Lugar geométrico del punto de intersección P.
3) Sea ABCD un rectángulo, (sentido antihorario) con A y B fijos y C y D variables. Hallar el lugar geométrico del centro O del rectángulo.
4) Dados dos puntos fijos A y B , hallar el lugar geométrico de los centros de las cfas. que contienen a B y A .

5) Dadas dos cfas. fijas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ exteriores e iguales, hallar el lugar geométrico de los centros de las cfas. tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

6) Dado un ángulo recto $x\widehat{O}y$ se consideran los cuadrados OAPB con $A \in \overline{Ox}$ y $B \in \overline{Oy}$, puntos variables sobre los lados. Hallar el lugar geométrico de P.

7) Sea un ángulo recto $x\widehat{O}y$ fijo y un punto fijo P interior a dicho ángulo. Por P se considera otro ángulo recto con P como vértice cuyos lados cortan a $\overline{Ox}$ en R y a $\overline{Oy}$ en S. Hallar el lugar geométrico de M, punto medio de $\overline{RS}$, al variar R y S.

8) Sean (r) y (s) dos rectas paralelas fijas y $\overline{AB}$ un segmento variable con $A \in r$ y $B \in s$ y M el punto medio de $\overline{AB}$. Por M se traza (p) perpendicular a (r) y (s), que corta a (r) en C y a (s) en D.
   a) Probar que $A\widehat{C}M = B\widehat{D}M$
   b) Hallar el lugar geométrico de M, al variar A y B.

9) Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las diagonales de los paralelogramos ABCD con el segmento $\overline{AB}$ fijo y la altura del punto A constante.

10) Sobre una semirrecta $\overline{Ax}$ fija se considera un punto variable B. Se construyen los triángulos equiláteros $\widehat{ABC}$ con C variable en un mismo semiplano respecto de $\overline{Ax}$. Hallar el lugar geométrico del incentro del $\widehat{ABC}$.

11) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios M de las cuerdas variables $\overline{AiBi}$, de longitud constante k, de una cfa. fija $\mathscr{C}(o,r)$.

12) Dado un ángulo fijo $A\widehat{O}B$ hallar el lugar geométrico de los centros de la cfas. tangentes a los lados del ángulo.

13) Sean B y C dos puntos fijos. Se consideran los triángulos $\widehat{ABC}$ acutángulos con h_A constante. Hallar el lugar geométrico de Ai al variar en un mismo semiplano respecto de (BC).

14) Dado un ángulo fijo $a\widehat{O}b$ de 60° en sentido horario, sobre $\overline{Oa}$ se toma Ai variable y sobre $\overline{Ob}$, Bi tal que $\overline{OA} = \overline{OB}$ sobre la semirrecta opuesta a $\overline{BA}$ se toma C, tal que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Lugar geométrico de C.

15) Dada una recta (r) fija y dos puntos A y B fijos pertenecientes a ella. Se consideran las cfas. variables tangentes a (r) en B. Por A se traza la otra tangente a la cfa. siendo T el punto de tangencia.
   a) Demostrar que $A\widehat{O}T = A\widehat{O}B$, siendo O centro de las cfas.
   b) Lugar geométrico de T.

16) Se da una cfa. $\mathscr{C}(o,r)$ y un segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB} = k$, con (AB) tangente a la cfa. en A. Lugar geométrico de B al variar A en la cfa.

17) Se considera el triángulo $\widehat{ABC}$ con $\overline{AB} = 5$ cm. $\overline{AC} = 7$ cm. $C\widehat{A}B = 60°$
Se toman M y N tal que $M \in \overline{BA}$ y $N \in \overline{CA}$ con $\overline{MB} = \overline{CN}$.
Hallar el lugar geométrico de P, cuarto vértice del paralelogramo NMBP al variar M.

18) Sea un triángulo $\widehat{ABC}$, con $\overline{BC}$ fijo y A un punto variable en uno de los semiplanos de borde BC. Sea (r) la perpendicular a AC por B.
Lugar geométrico de $\{P\} = r \cap AC$.

19) Se consideran los triángulos $\widehat{ABC}$ (antihorario) equiláteros, con A fijo y BiCi variable. Sea P un punto fijo de las rectas BiCi tal que $B \prec C \prec P$
   a) Lugar geométrico de Bi.
   b) Lugar geométrico de Ci.

20) Se considera un arco capaz de segmento $\overline{BC}$ y 60° fijo. Sea A variable en el arco. Sobre la semirrecta opuesta a $\overline{AB}$ se ubica D tal que AC=AD. L.G. del punto D.

21) Por un punto P exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O, varia una recta que corta la cfa. en A y B. Hallar el lugar geométrico del punto medio M de $\overline{AB}$.

22) En un arco capaz de segmento $\overline{AB}$ y 60° varia un punto P. La mediatriz de $\overline{AP}$ corta a la recta BP en M. Hallar el lugar geométrico de M.

23) Sea un arco capaz de segmento $\overline{BC}$ y 60° fijo. Sobre el arco varia un punto A y se trazan las bisectrices de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ que se cortan en I (incentro).

a) Calcular el ángulo $\widehat{BIC}$.

b) Hallar el lugar geométrico del incentro.

c) Por el punto C se traza la bisectriz exterior que corta a (BI) en E (exincentro). Hallar el ángulo $\widehat{BEC}$.

d) Hallar el lugar geométrico del exincentro E.

e) Generalice para un ángulo α.

24) Sean $\widehat{ABC}$ acutángulos con $\overline{BC}$ fijo, A variable y $\widehat{BAC}$=30°. Se trazan las alturas de B y C que se cortan en H (ortocentro).Sean H_B y H_C los pies de las alturas.

a) Hallar BHC.

b) Hallar el lugar geométrico de H.

c) Generalice si el ángulo inicial es $\widehat{BAC}=\alpha$.

25) Sean dos cfas. $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$ secantes en A y B y una recta (r) variable por A que corta a las circunferencias en N y M respectivamente.

a) Probar que los ángulos del triángulo $\widehat{MBN}$ se mantienen constantes.

b) Hallar el lugar geométrico del incentro I del triángulo anterior.

c) Hallar el lugar geométrico del circuncentro C.

26) En un arco capaz de segmento $\overline{AB}$ y 60° se considera un punto C variable. Se construye un punto P perteneciente a la semirrecta opuesta a la CA, tal que $\widehat{CBP}$=45°.

a) Hallar el lugar geométrico de P.

b) Hallar el lugar geométrico del circuncentro del $\widehat{CBP}$.

27) Sea un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en C, con $\hat{A}$=60° y sentido antihorario y sea $\mathscr{C}$ la cfa. circunscrita. Se considera P perteneciente al arco CAB. La perpendicular a CP en C corta a BP en E.

a) Probar que $\widehat{CAB}=\widehat{CPB}$ y $\widehat{CEP}=\widehat{CBA}$.

b) Hallar lugar geométrico de E al variar P.

c) Sea S punto medio de $\overline{PE}$. Hallar lugar geométrico de S.

28) Se considera un arco capaz de segmento $\overline{AB}$ y 45° y un punto P variable en dicho arco. Sea la semirrecta $\overline{Bx}$ tal que PBx=30°, $AP \cap \overline{Bx} = \{E\}$, $\widehat{AB} \cap \overline{Bx} = \emptyset$

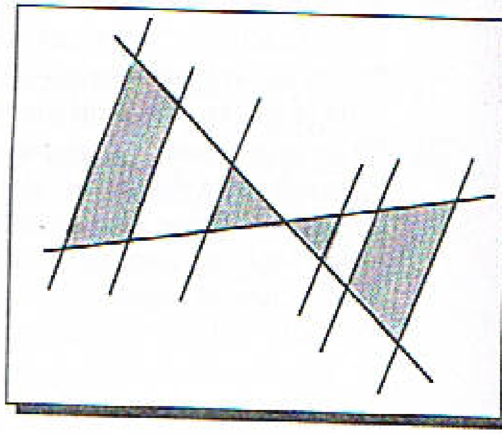
Hallar el lugar geométrico de E.

a) Hallar el lugar geométrico del circuncentro C del triángulo $\widehat{PEB}$.

29) Sea $\mathscr{C}$ una cfa. de centro O y $\overline{BC}$ un diámetro fijo. Sean A y M dos puntos de $\mathscr{C}$ en uno de los semiplanos de borde BC, en el orden $B \prec A \prec M \prec C$ con A fijo y M variable. La mediatriz de $\overline{AM}$ corta a MB en P. Hallar el lugar geométrico de P.

CAPITULO 10

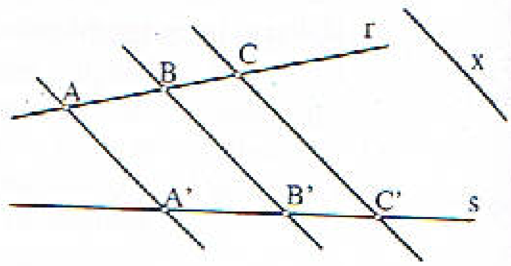
TEOREMA DE THALES Y APLICACIONES



1. PROYECCION PARALELA

1.1 Definición

Dadas dos rectas (r) y (s) y una tercera recta (x) secante con ambas, se define proyección paralela de (r) sobre (s), según la dirección de la recta (x), a la función p_x que hace corresponder a cada punto de (r), un punto de (s), que resulta de cortar la paralela a (x) por el punto de (r), con la recta (s).



$$p_x : r \rightarrow s$$

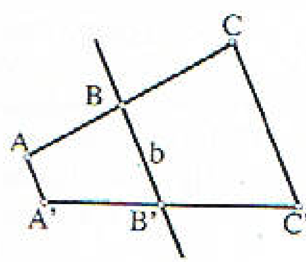
1.2 Propiedad

La función proyección paralela es biyectiva y conserva el orden .

Demostración

p_x es biyectiva pues para todo punto de (r) existe y es única su imagen sobre (s), y, recíprocamente todo punto de (s) tiene una única preimagen en (r) resultante de la intersección de la paralela única por el punto, (axioma de paralelismo), con dicha recta.

Además la función conserva el orden; pues si se cumple que $A \prec B \prec C$ entonces $A' \prec B' \prec C'$ como se fundamentará a continuación.



Sea (b) la recta determinada por B y B' y α el semiplano de borde (b), al cual pertenece A. Como A y C están en semiplanos opuestos y

$A' \in \alpha$ y $C' \in op(\alpha)$

(pues $\overline{AA'} \cap b = \emptyset$ y $\overline{CC'} \cap b = \emptyset$),

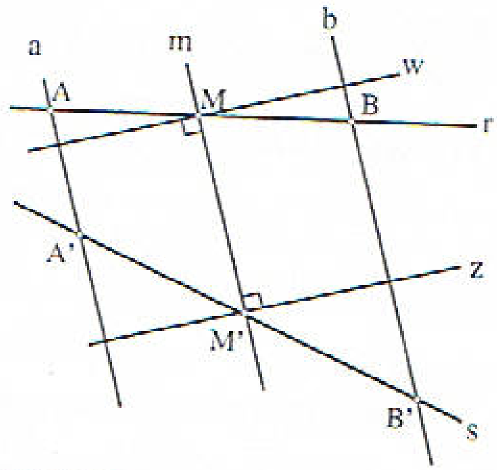
se cumplirá que A' y C' están en semiplanos opuestos, por lo que, existe el punto B', tal que $\{B'\} = \overline{A'C'} \cap b$, de donde ,$A' \prec B' \prec C'$ como se quería probar.

1.3 Propiedad

La proyección paralela conserva los puntos medios.

Demostración

Se demostrará que si M es punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces M' será punto medio de $\overleftrightarrow{A'B'}$, siendo estos puntos proyecciones de los primeros.



Sean las siguientes rectas

AA' = a , BB' = b , MM' = m,

(w) la perpendicular a (m) por M,

y (z) la perpendicular a (m) por M

Se consideran las simetrías centrales de centros M y M'. Es posible afirmar que $C_M = S_w \circ S_m$ y $C_{M'} = S_z \circ S_m$ (descomposición). Combinando ambas ecuaciones se tiene que $C_{M'} = S_z \circ S_w \circ C_M$. Veamos que ocurre con la recta (a) en $C_{M'}$

$$a \xrightarrow{C_M} b \xrightarrow{S_w} b \xrightarrow{S_z} b$$

Entonces en $C_{M'}$: $a \to b$, $s \to s$, de donde $a \cap s \to b \cap s$, o sea $A' \to B'$, y en consecuencia M' es punto medio de $\overleftrightarrow{A'B'}$, como se quería demostrar.

2. PROPORCIONES

Sean a, b, c, d números reales positivos

- Se llama proporción a la igualdad entre dos razones $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$
- Dados tres de los componentes de una proporción, el cuarto proporcional existe y es único.
- Dada una proporción inicial son equivalentes las siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

3. TEOREMA DE THALES

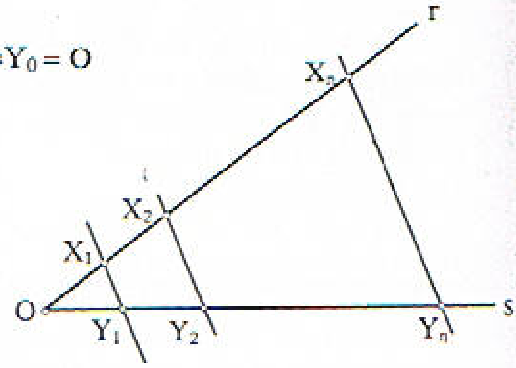
Si dos rectas orientadas (r) y (s), secantes en un punto O, son cortadas por rectas paralelas según una dirección distinta de las de (r) y (s), las longitudes de los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a las determinadas por los segmentos correspondientes en la otra.

Observaciones previas

Recordaremos que M es punto medio de $\overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$

En particular M es punto medio de $\overleftrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{OP}}{2}$

Demostraremos el teorema para razones naturales, $n \in N$, y admitiremos que se puede demostrar para **n** entero, racional y real , en ese orden.



Hipótesis:

$X_0, X_1, X_2 \ldots X_n \in r$, $Y_0, Y_1, Y_2 \ldots Y_n \in s$, $X_0 = Y_0 = O$

$X_1Y_1 \parallel X_2Y_2 \ldots \parallel X_nY_n$, $\dfrac{\overline{OX_n}}{\overline{OX_1}} = n$, $\forall\, n \in N$

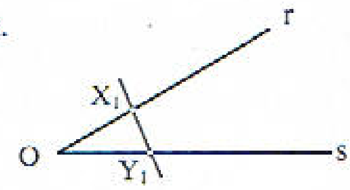
Tesis $\dfrac{\overline{OY_n}}{\overline{OY_1}} = n$

Demostración

Demostraremos el teorema por inducción completa.

$\boxed{n = 0}$ Como $\overline{OY_0} = 0$, entonces $\dfrac{\overline{OY_0}}{\overline{OY_1}} = 0$

$\boxed{n = 1}$ Como $\overline{OY_1} = \overline{OY_1}$,entonces $\dfrac{\overline{OY_1}}{\overline{OY_1}} = 1$

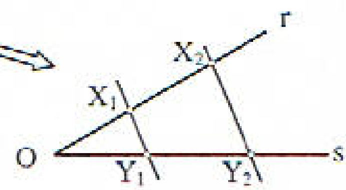


$\boxed{n = 2}$ Si $\dfrac{\overline{OX_2}}{\overline{OX_1}} = 2$ entonces $\overline{OX_1} = \dfrac{\overline{OX_2}}{2}$, de donde

X_1 es punto medio del segmento $\overline{OX_2}$.

Como la proyección paralela conserva los puntos medios, se cumplirá que Y_1 será punto medio del segmento $\overline{OY_2}$, o sea que, por definición,

$\overline{OY_1} = \dfrac{\overline{OY_2}}{2}$ y por lo tanto $\dfrac{\overline{OY_2}}{\overline{OY_1}} = 2$

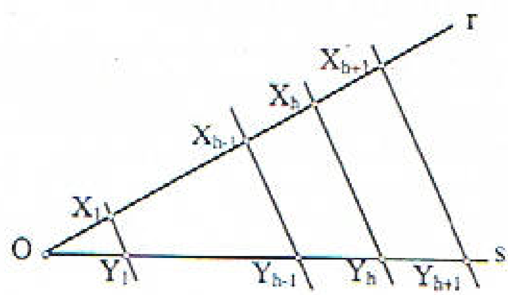


Hipótesis de la inducción

$\boxed{\forall n \in N , n \leq h}$ $\dfrac{\overline{OY_h}}{\overline{OY_1}} = h$

Tesis de la inducción completa

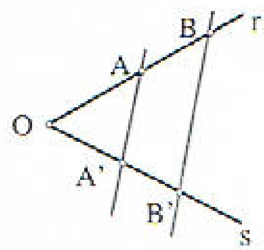
$\boxed{n = h+1}$ $\dfrac{\overline{OY_{h+1}}}{\overline{OY_1}} = h+1$



Sobre la recta (r) y para el punto X_{h-1} se cumple que $\dfrac{\overline{OX_{h-1}}}{\overline{OX_1}} = h-1$, y para el punto X_{h+1} se tiene que $\dfrac{\overline{OX_{h+1}}}{\overline{OX_1}} = h+1$, sumando miembro a miembro y operando tenemos que $h.\overline{OX_1} = \dfrac{\overline{OX_{h-1}} + \overline{OX_{h+1}}}{2}$ .Para el punto X_h se cumple que $\dfrac{\overline{OX_h}}{\overline{OX_1}} = h$, de donde si se sustituye en la igualdad anterior se obtiene que $\overline{OX_h} = \dfrac{\overline{OX_{h-1}} + \overline{OX_{h+1}}}{2}$, por lo cual, X_h es punto medio del segmento $\overset{\longmapsto}{X_{h-1}X_{h+1}}$. Teniendo en cuenta que la proyección paralela conserva los puntos medios, podemos afirmar que Y_h es punto medio de $\overset{\longmapsto}{Y_{h-1}Y_{h+1}}$, cumpliéndose por definición que $\overline{OY_h} = \dfrac{\overline{OY_{h-1}} + \overline{OY_{h+1}}}{2}$. Si se dividen ambos miembros de la igualdad entre $\overline{OY_1}$, y considerando que por hipótesis de la inducción $\dfrac{\overline{OY_h}}{\overline{OY_1}} = h$ y $\dfrac{\overline{OY_{h-1}}}{\overline{OY_1}} = h-1$, operando se concluye que $\dfrac{\overline{OY_{h+1}}}{\overline{OY_1}} = h+1$, de dónde resulta la tesis.

Corolario

Como el teorema se cumple para cualquier razón real positiva, es posible afirmar entonces, que para cualquier par de puntos A y B pertenecientes a (r), y sus proyecciones según una dirección dada A' y B' sobre (s), que: $AA' \parallel BB' \Rightarrow \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$



4.- APLICACIONES DE THALES A TRIANGULOS

Toda paralela a un lado de un triángulo, determina sobre las rectas que contienen a los otros lados, segmentos de longitudes proporcionales.

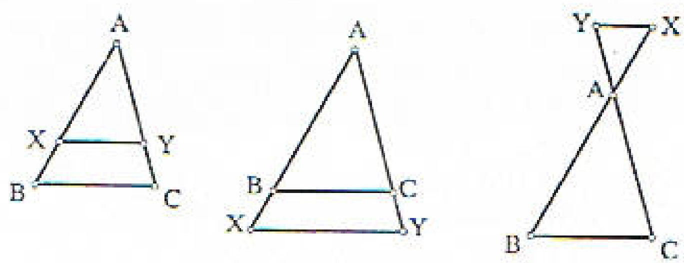
Hipótesis

$X \in AB,\ Y \in AC$

$XY \parallel BC$

Tesis

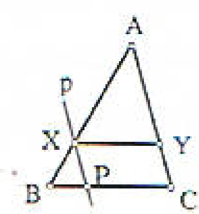
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AY}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{XY}}$



Demostración

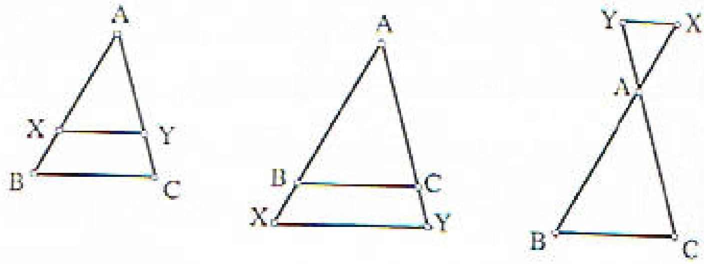
Por el punto X se considera la recta (p), paralela a AC, que corta a BC en P.

Como XPCY es un paralelogramo tenemos que PC=XY.



Si se consideran las paralelas XP y AC; por Thales se cumplirá que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$, de dónde $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{XY}}$, pues $\overline{PC} = \overline{XY}$. Así mismo, si se consideran las paralelas XY y BC, por Thales se cumplirá que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}}$, lo que completa la tesis.

4.1 RECIPROCO DE THALES EN LOS TRIANGULOS



Hipótesis

$X \in AB$, $Y \in AC$, según figura.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}}$

Tesis

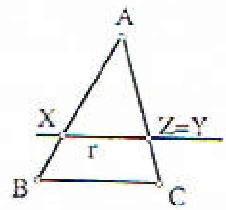
BC $\parallel$ XY

Demostración

Por el punto X se considera la recta (r) paralela a BC, que corta a AC en el punto Z, o sea BC $\parallel$ XZ.

Aplicando el teorema directo se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AZ}}$; y por hipótesis que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}}$;

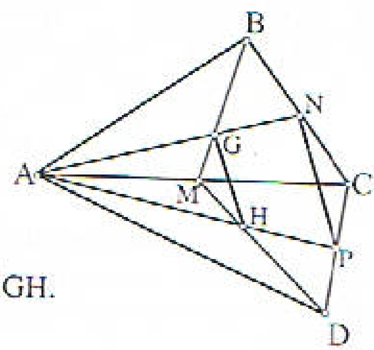
Como el cuarto proporcional es único, se debe de cumplir que $\overline{AZ} = \overline{AY}$, y por axioma de distancia ese punto es único, o sea que Y = Z, y considerando que BC $\parallel$ XZ, se cumplirá la tesis BC $\parallel$ XY.



4.2 EJEMPLO

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y M, N y P puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Se consideran el punto G, intersección de MB con AN y el punto H intersección de MD con AP. Probar que NP $\parallel$ GH

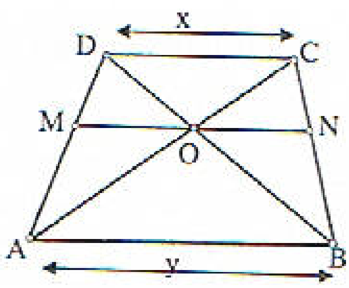
Como $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ son medianas en el triángulo $\widehat{ABC}$ y $\overline{DM}$ y $\overline{AP}$ también lo son, en el $\widehat{ACD}$, se cumplirá que G y H son baricentros de dichos triángulos. Considerando la propiedad del baricentro, en la que éste dista del vértice, 2/3 de la longitud de la mediana, se puede afirmar que $\frac{\overline{AG}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{2}{3}$ y aplicando el recíproco de Thales se concluye que NP $\parallel$ GH.



5. EJEMPLO

Sea ABCD el trapecio de la figura de medidas $\overline{CD}= x$ y $\overline{AB}= y$. Por el punto de corte de las diagonales, O, se traza una paralela a las bases que corta a los lados en M y N. Probar que:

1) O divide a las diagonales en segmentos proporcionales a las bases.
2) M y N dividen a los lados en segmentos proporcionales a las bases.
3) O es punto medio de $\overline{MN}$ y calcular $\overline{MN}$ en función de las medidas x e y.



1) Aplicando Thales en los triángulos de lados paralelos, $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ se cumple que $\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{x}{y}$

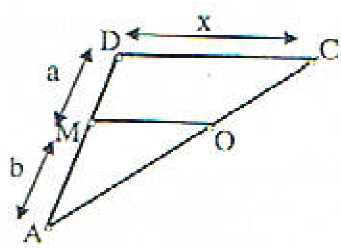
2) En el $\widehat{ACD}$ se cumple que, $\frac{\overline{MA}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{OM}}{x}$

En el $\widehat{ABD}$ se cumple que, $\frac{\overline{MD}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{OM}}{y}$

Se efectúan operaciones y al combinar ambas igualdades se llega a que $\frac{\overline{MD}}{\overline{MA}}=\frac{x}{y}$, que era lo que se quería probar. Se razona igual para el otro lado.

3) Se considera en el triángulo $\widehat{ADC}$

$\overline{MD}= a$ y $\overline{AM}= b$. De la parte anterior se puede afirmar que $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$.



Aplicando propiedades de las proporciones se cumple que $\frac{a+b}{b}=\frac{x+y}{y}$ y en el triángulo $\widehat{ADC}$ por Thales, que $\frac{a+b}{b}=\frac{x}{\overline{MO}}$.

Se combinan las últimas dos igualdades y operando resulta $\overline{MO}=\frac{xy}{x+y}$.

Se razona igual para $\overline{NO}$, o sea que $\overline{NO}=\frac{xy}{x+y}$, de dónde O es punto medio de $\overleftrightarrow{MN}$ y por lo tanto $\overline{MN}=\frac{2xy}{x+y}$.

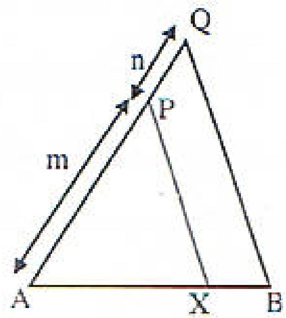
6. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE PUNTOS DE UNA RECTA DETERMINADOS POR SU RAZON DE DISTANCIAS A DOS DE ELLOS

Dados dos puntos A y B y un número real positivo $k \neq 1$, existen y son únicos dos puntos X e Y pertenecientes a la recta AB tal que $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = k$,
con $X \in \overline{AB}$, $X \neq B$ e $Y \notin \overline{AB}$.

6.1 Punto interior al $\overline{AB}$

Dado k, lo expresaremos como $k = \frac{m}{n}$ con $m,n \in \mathbb{R}^+$.

Se considera una semirrecta cualquiera de origen A y en ella se ubican P y Q tal que AP=m y PQ=n, como indica la figura.



Por P se traza la paralela a BQ que corta a AB en X. Como $A \prec P \prec Q$, entonces $A \prec X \prec B$ pues la función proyección paralela conserva el orden, de donde $X \in \overline{AB}$.

Por Thales se puede afirmar que $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{XA}}$, de dónde se observa que la distancia $\overline{XA}$ es única por ser el cuarto proporcional.

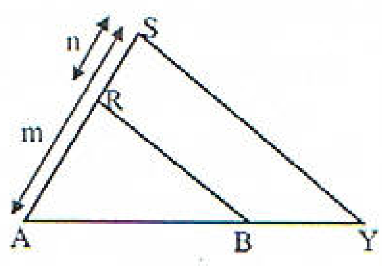
De la anterior proporción se deduce que

$\frac{m+n}{m} = \frac{\overline{XA}+\overline{XB}}{\overline{XA}}$ que es equivalente a $\frac{m}{n} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}$, o sea $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = k$.

Finalmente por el axioma de distancia el punto X, que pertenece a la semirrecta AB a una distancia XA es único, de dónde resulta la tesis.

6.2 Punto exterior al $\overline{AB}$

Pruebe el lector en forma similar que existe $Y \notin \overline{AB}$, tal que $\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = k$ utilizando la construcción de la figura adjunta.



Observación

Si k=1, X es punto medio de $\overline{AB}$ e Y no existe.

7. CUATERNA ARMONICA

Los puntos (ABXY) en las condiciones anteriores reciben el nombre de cuaterna armónica. Decimos que X e Y son conjugados armónicos respecto de A y B, según la razón k, y se cumple que

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}=k$$

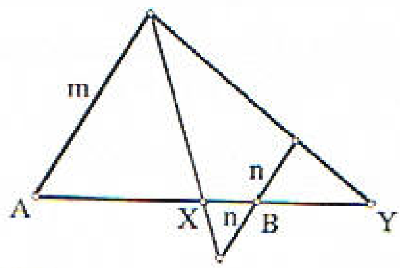
Construcción: Dados A, B y m/n

Método 1

Consiste en efectuar las dos construcciones explicadas anteriormente.

Método 2

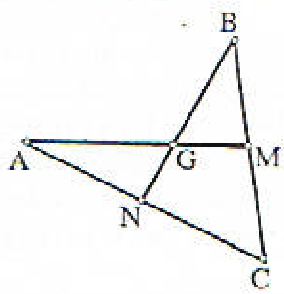
- Se trazan dos paralelas cualesquiera por A y B.
- En ellas se construyen un segmento de longitud "m" a partir de A, y dos segmentos de longitud "n", uno en cada semirrecta opuesta de origen B.
- Las intersecciones de las rectas determinadas por los extremos de los segmentos con la recta AB, son los puntos buscados X eY.



7.1 EJEMPLO

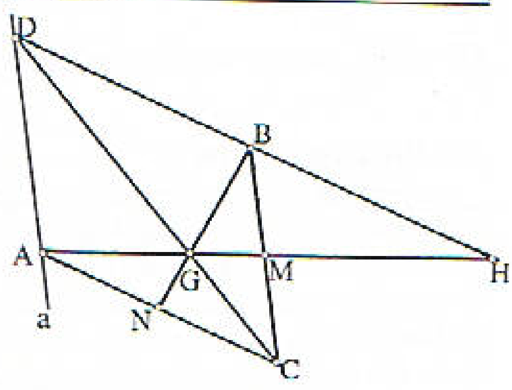
Se considera un segmento $\overline{AM}$ de longitud 3, y se construye otro segmento $\overline{BC}$ cualquiera, tal que M sea punto medio de $\overline{BC}$. Sea N punto medio de $\overline{AC}$ y G la intersección de $\overline{BN}$ con $\overline{AM}$.

1) Construir un punto H tal que (AMGH) resulte una cuaterna armónica.
2) Calcular las longitudes $\overline{HA}$, $\overline{HM}$ y $\overline{HG}$



1) Para la construcción de H se aplicará el segundo método explicado anteriormente, por lo que, por A se traza una recta (a), tal que a $\parallel$ BC. Sea D la intersección de GC con (a).

El punto H buscado será la intersección de las rectas BD y AM



2) Se observa que en el triángulo $\widehat{ABC}$, G es su baricentro, por ser punto de corte de las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. Como el baricentro dista del vértice A, 2/3 de la longitud de la mediana $\overline{AM}$ y del punto medio M, 1/3 de $\overline{AM}$ se cumplirá que $\overline{GA}$=2/3.(3) = 2 y GM=1/3.(3) =1

Así mismo, como (AMGH) es una cuaterna armónica, se cumplirá que $\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HM}} = 2$

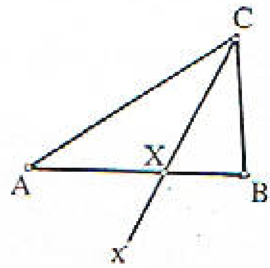
Como $\overline{HA} = \overline{HM} + 3$ (ver figura), se puede afirmar que $\frac{\overline{HA}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{HM}+3}{\overline{HM}} = 2$.

De la última igualdad se deduce que $\overline{HM} + 3 = 2\overline{HM}$ y entonces $\overline{HM} = 3$, luego $\overline{HA} = 3+3 = 6$ y $\overline{HG} = \overline{HM} + \overline{GH} = 4$

8. TEOREMA DE LAS BISECTRICES

8.1 Bisectriz interior

En un triángulo cualquiera cada bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos de longitudes proporcionales a la longitud de los lados que con ella concurren.

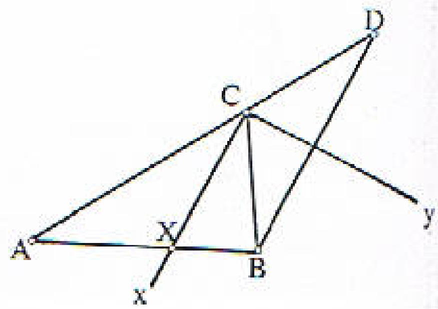


Hipótesis : $\overrightarrow{Cx}$ bisectriz interior del $\widehat{ACB}$
$\overrightarrow{Cx} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{X\}$

Tesis : $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

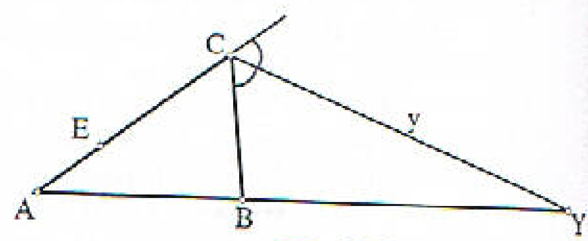
Demostración

Sobre la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{CA}$ se considera un punto D tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$.
Sea $\overrightarrow{Cy}$ la bisectriz exterior del $\widehat{ACB}$. Como el $\widehat{BCD}$ es isósceles, $\overrightarrow{Cy}$ es perpendicular a BD y además $\overrightarrow{Cx}$ y $\overrightarrow{Cy}$ son perpendiculares entre sí, por ser bisectriz interior y exterior respectivamente, se deduce que CX || BD. Aplicando Thales para estas paralelas se cumple que $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CD}$ y como $\overline{CD} = \overline{CB}$, por construcción, se concluye que $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$



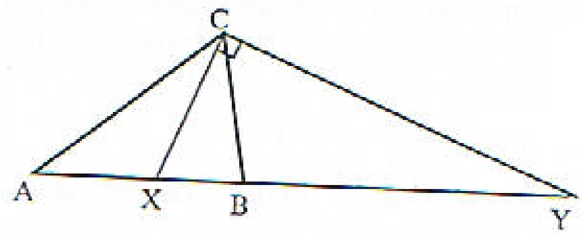
8.2 Bisectriz exterior

Si una bisectriz exterior de uno de los ángulos de un triángulo corta a la recta que contiene al lado opuesto, se cumplirá que las distancias del punto de intersección a los extremos de dicho lado, son proporcionales a las longitudes de los lados concurrentes con la bisectriz Demuestre el lector que $\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ tomando un punto auxiliar E, incluido en $\overleftrightarrow{CA}$, tal que $\overline{CE} = \overline{CB}$ como indica la figura.



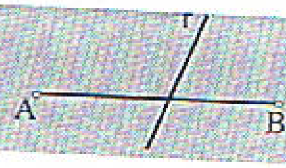
Corolario

Las intersecciones de las bisectrices interior y exterior de cada ángulo de un triángulo con la recta que contiene al lado opuesto forman una cuaterna armónica con los vértices de dicho lado. Se cumple entonces que $\dfrac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{YB}}$

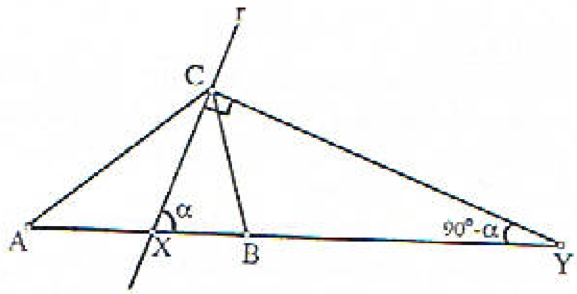


8.3 EJEMPLO

Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo un lado $\overline{AB}$ y la recta (r) que contiene la bisectriz interior del ángulo $\widehat{C}$, según figura.



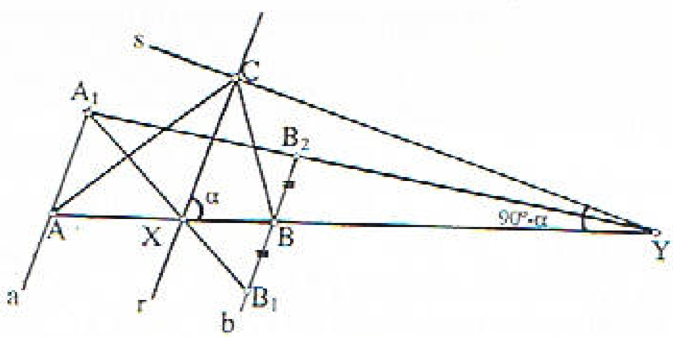
En una figura auxiliar se construye un triángulo cualquiera y se ubican los datos del problema como si éste estuviera resuelto. Sean X e Y los puntos de corte de las bisectrices con la recta AB. Aplicando el teorema de las bisectrices se puede afirmar que (ABXY) es una cuaterna armónica, de la cual se conocen tres puntos; por lo que, es posible construir el cuarto punto Y.



Además como el triángulo $\widehat{XCY}$ es rectángulo, por ser las bisectrices perpendiculares entre sí, se cumple que si llamamos α al $\widehat{CXY}$, el ángulo $\widehat{XYC}$ será igual a 90°-α

Construcción

- Por los puntos A y B se trazan dos rectas (a) y (b) paralelas cualesquiera, que se cortan con otra recta cualquiera que pase por X, determinando los puntos A_1 y B_1.
- Se construye $B_2 \in b$ tal que $\overline{B_2B} = \overline{B_1B}$
- Se halla el punto Y intersección de A_1B_2 con $\overleftrightarrow{AB}$
- Se construye la semirrecta $\overrightarrow{Ys}$ tal que forme un ángulo de 90°-α con $\overrightarrow{YX}$.
- El punto C será la intersección de $\overrightarrow{Ys}$ con la recta (r).

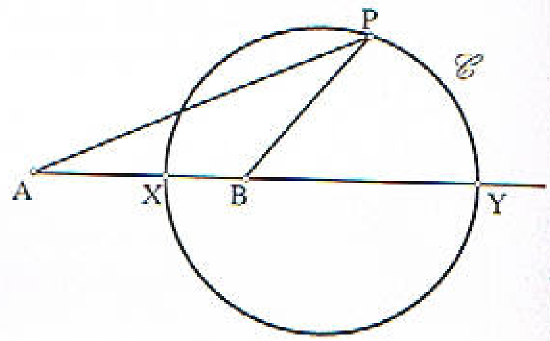


9. CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

El lugar geométrico de los puntos P del plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos A y B es un número real k positivo, $k \neq 1$, es una circunferencia de diámetro $\overleftrightarrow{XY}$ incluido éste en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y tal que la razón de distancias de X e Y, a A y B es igual a k.

$$\{P \in \pi : \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k\} = \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$$

Se demostrará en primer lugar que todo punto que cumple la propiedad pertenece a la circunferencia, o sea $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k \Rightarrow P \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$.



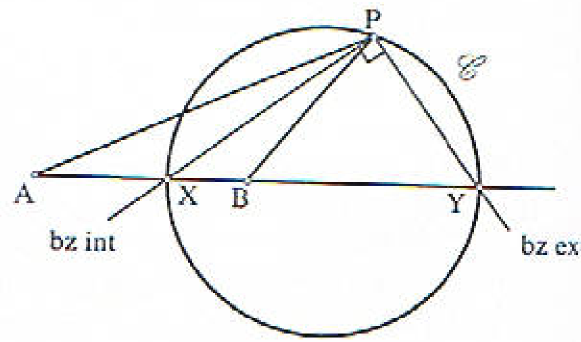
$\boxed{\text{Si } P \in AB}$

Entonces por las condiciones iniciales P=X o P=Y de dónde $P \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$

$\boxed{\text{Si } P \notin AB}$

Entonces existe el triángulo $\widehat{ABP}$. Por el teorema de las bisectrices podemos afirmar que existen dos puntos, tal que , con A y B forman una cuaterna armónica. Como dichos puntos son únicos deben ser X e Y de las condiciones iniciales.

Cómo el ángulo que forman las bisectrices exterior e interior es igual a un recto, se tiene que el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por dos puntos fijos X e Y es la circunferencia de diámetro $\overleftrightarrow{XY}$ (lugar geométrico de Thales).



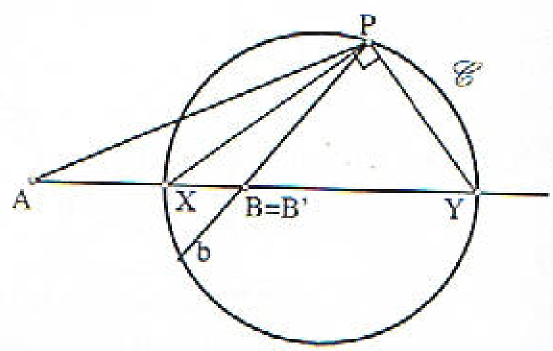
De donde se concluye que $P \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$.

A continuación probaremos que todo punto de la circunferencia cumple la propiedad, o sea que sí $P \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$

$\boxed{\text{Si } P \in AB}$

Entonces P=X o P=Y, y por las condiciones iniciales, $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$

$\boxed{\text{Si } P \notin AB}$



Se considera la semirrecta $\overleftarrow{PA}$ y la simetrizamos respecto del eje PX. Sea $\overleftarrow{Pb}$ la semirrecta simétrica y B' su intersección con la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Como $\overline{PX}$ es eje de simetría se cumple que $\overline{PX}$ es bisectriz interior del $\widehat{APB}$. Además como $P \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$ se cumple que $\widehat{XPY} = \widehat{1R}$; entonces $\overleftarrow{PY}$ es bisectriz exterior del $\widehat{APb}$.

Por el corolario del teorema de las bisectrices se tiene que (AB'XY) es una cuaterna armónica y por las condiciones iniciales (ABXY) también lo es. Como el conjugado armónico de A respecto del par X,Y es único se concluye B=B'. Aplicando nuevamente el teorema de la bisectriz en el $\widehat{APB}$ tenemos que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}$ y como $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=k$ (por las condiciones iniciales)

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$ de dónde resulta la tesis.

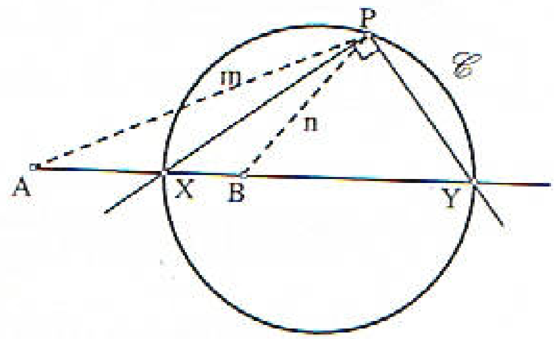
9.1 Construcción de la circunferencia conocidos A, B y k

Método 1

Consiste en construir la cuaterna armónica (ABXY) tomando $k=\frac{m}{n}$ con m, n$\in \mathbb{R}^{+}$. Una vez hallados X e Y se traza la circunferencia con dicho diámetro.

Método 2

1) Se halla un punto P de la cfa. de Apolonio cortando una cfa. de centro A y radio m con otra cfa. de centro B y radio n.
2) Se trazan las bisectrices exterior e interior al ángulo APB que cortan a la recta AB en X e Y.
3) Se construye la cfa. de diámetro $\overline{XY}$.



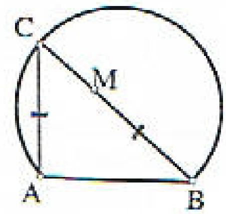
Observación

Existen infinitos m,n reales tales que $k=\frac{m}{n}$, por lo que estos números son arbitrarios.

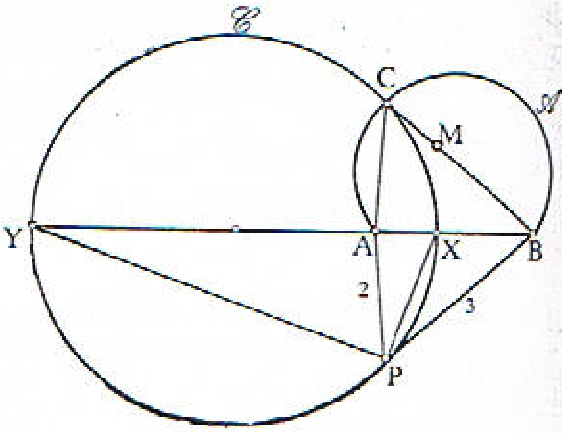
9.2 Ejemplo

Dado un arco de cfa. de extremos A y B, se consideran los triángulos $\widehat{ABC}$ con C variable sobre el arco, tal que $\overline{AC}<\overline{BC}$. Sobre $\overline{BC}$ se toma un punto M tal que $\overline{CA}=\overline{MB}$. Hallar el triángulo de la familia que cumpla $\overline{CM}=\overline{CA}/2$.

En primer lugar se ubican los datos sobre una figura de análisis como si el problema estuviera resuelto. Se observa que $\overline{CB}=\overline{CM}+\overline{MB}$ y considerando que $\overline{CM}=\frac{\overline{CA}}{2}$ y $\overline{CA}=\overline{MB}$ entonces se cumplirá $\overline{CB}=\frac{3}{2}\overline{CA}$ de dónde $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{2}{3}$ Se deduce entonces que C pertenece a la circunferencia de Apolonio de razón 2/3, con respecto a los puntos A y B. La intersección de la circunferencia con el arco determinará el punto C buscado.



Construcción



Dados A y B y la razón $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$, se construye la circunferencia de Apolonio de diámetro $\overleftrightarrow{XY}$ siguiendo el segundo método explicado anteriormente, por lo que se halla un punto P tal que $\overline{PA}=2$ y $\overline{PB}=3$ ($P=\mathscr{C}_{A,2}\cap\mathscr{C}_{B,3}$). Luego se trazan las bisectrices del $\widehat{APB}$, e intersectando con la recta AB, se obtienen los puntos X eY. Una vez construida la circunferencia $\mathscr{C}$, se interseca con el arco $\mathscr{A}$ de la hipótesis, obteniéndose el punto C pedido.

10. EJERCICIOS

1) Dado un segmento $\overleftrightarrow{AB}$, construir $C\in\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{2}$

2) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, con $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$ y $\overline{BC}=4$

   a) Hallar $M\in\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{2}{3}$

   b) Sea (p) la paralela a (BC) por M y $p\cap AC=\{N\}$.
   Deducir las medidas $\overline{AN}$ y $\overline{MN}$

3) Construir dos segmentos conocida su suma y su razón.

4) Dados tres puntos A,B e Y en ese orden, construir $X\in\overleftrightarrow{AB}$ tal que (ABXY) sea una cuaterna armónica

5) En un triángulo $\widehat{ABC}$ se conocen $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$ y la razón $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}=\frac{3}{2}$, siendo I el punto de corte de la bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$ con $\overleftrightarrow{BC}$.
Construir dicho triángulo.

6) Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, con $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$ y $\overline{AC}=3$, se consideran los puntos de corte I y E de las bisectrices interior y exterior con BC.
Calcular las medidas $\overline{BI}$, CE y $\overline{EI}$.

7) Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$, $\overline{AB}<\overline{CD}$, $AD \cap BC=\{M\}$,
$AC \cap BD=\{O\}$, P punto medio de $\overline{DC}$ y N punto medio de $\overline{AB}$.
Demostrar que $(MONP)$ es una cuaterna armónica.

8) Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ de diámetro $\overline{AB}$ y centro O,
y $\overline{CD}$ otro diámetro cualquiera.
a) Construir $G \in AO$ tal que $(AOGB)$ resulte una cuaterna armónica.
b) Demostrar que G es el baricentro del $\widehat{ACD}$.

9) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ conociendo el ángulo $\widehat{A}$, la medida de la mediana $\overline{AM}$ y la razón $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{m}{n}$.

10) En un triángulo $\widehat{ABC}$ con M punto medio de $\overline{BC}$, se traza la bisectriz del $\widehat{AMB}$, que corta a $\overline{AB}$ en D, y la bisectriz del $\widehat{AMC}$ que corta a $\overline{AC}$ en E.
Demostrar que $DE \parallel BC$.

11) Dada una circunferencia $\mathscr{C}$,una cuerda $\overline{AB}$, y un número k positivo hallar un punto $P \in \mathscr{C}$ tal que: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$.

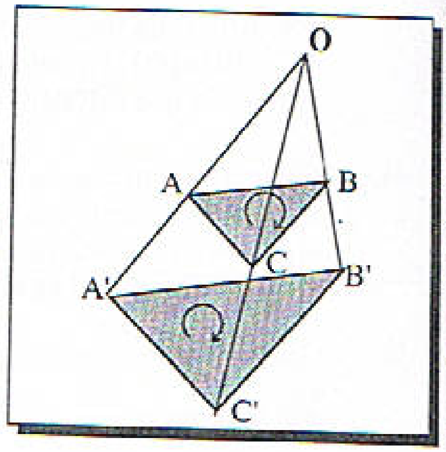
12) Se dan tres puntos A, X y B en ese orden alineados.
a) Hallar Y exterior a $\overline{AB}$ para que $(ABXY)$ resulte una cuaterna armónica.
b) Hallar el lugar geométrico de los puntos P tal que $\widehat{APX}=\widehat{BPX}$.
c) Demuestre que $\widehat{APX}+\widehat{BPY}=90°$

13) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ conociendo:
a) la medida $\overline{AB}$, la medida de la altura h_C y la razón $k=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$
b) el ángulo $\widehat{C}$, la medida de la mediana $\overline{AM}$ y la razón $k=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

14) Sobre un arco de circunferencia de extremos A y B varía un punto M, tal que $\overline{AM}<\overline{BM}$. Sobre $\overline{BM}$ se toma G tal que $\overline{AM}=\overline{BG}$ y se considera el punto C simétrico del A respecto de M. Construir M de modo que G sea el baricentro del $\widehat{ABC}$.

CAPITULO 11

HOMOTECIA



1.-DEFINICION

Dado un punto O del plano y un número real k ,distinto de cero, se denomina homotecia de centro O y razón k a una función biyectiva del plano en el plano, que se anotará $H_{O,k}$; y que cumple las siguientes condiciones:

1) $H_{O,k}(O) = O$
2) $\forall P \neq O$, con $P' = H_{O,k}(P)$ se cumple que $\overline{OP'} = \overline{OP}.|k|$
3) Si k>0 entonces P' pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ ⟹

4) Si k<0 entonces P' pertenece a la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{OP}$ ⟹

Observaciones

- El punto O es el único punto unido en la transformación.
- Las homotecias son transformaciones directas (mantienen el sentido en el plano), que mantienen las relaciones de orden y alineación, y multiplican las distancias.
- Para toda homotecia de centro O y razón k, existe su homotecia inversa, de centro O y razón 1/k.

2. IMAGENES DE RECTAS Y SEGMENTOS

2.1 Imágenes de rectas que contienen al centro

Las rectas que contienen al centro de homotecia son dobles.

Demostración

Sea una recta (r) que contiene al centro de homotecia O.
Para todo punto $P \in (r)$ se cumple que P' pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ o a su opuesta, ambas incluidas en la recta (r), de dónde, la recta (r) se transforma en sí misma.

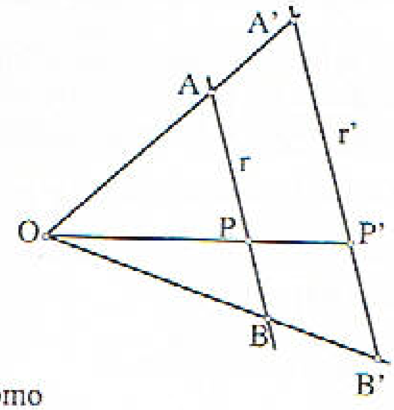
2.2 Imágenes de rectas que no contienen al centro

Las rectas que no contienen al centro de homotecia, tienen por imagen a una recta paralela.

<u>Demostración</u>

Supongamos k>O

Sea una recta (r) y en ella dos puntos A y B y , A', B' y (r') sus imágenes en la homotecia $H_{O,k}$. Por definición $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$ cumpliéndose que $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$ ($|k| = k$ pues k>O).



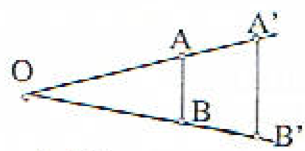
Por el recíproco de Thales para triángulos es posible afirmar que AB || A'B' y como A'B'= r' entonces r || r'. Para cualquier otro punto $P \in r$ se cumpliría que AP || A'P', y como por A' pasa una sola paralela a (r), entonces $P' \in r'$. Recíprocamente, todo punto $P' \in r'$, tiene una preimagen en (r), pues basta considerar la homotecia inversa de razón 1 / k, que los hace corresponder.
Demuestre el lector análogamente el caso k<O

2.3 Segmentos homotéticos

La razón entre las medidas de dos segmentos homotéticos cualesquiera, es igual al valor absoluto de la razón de la homotecia.

<u>Hipótesis:</u> $H_{O,k}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

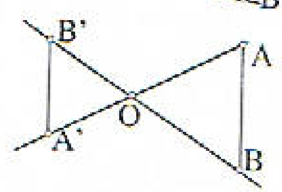
<u>Tesis:</u> $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|$



<u>Demostración</u>

Considerando que AB || A'B' y aplicando Thales se cumple que $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|$

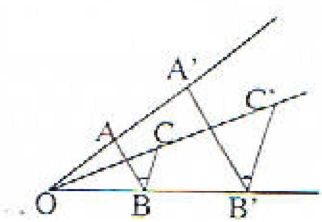
de donde resulta la tesis.



2.4 EJERCICIOS TEORICOS

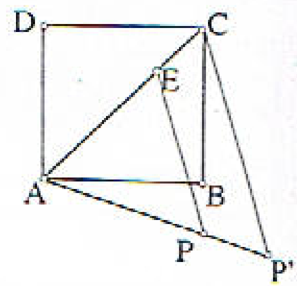
1. Demostrar el teorema anterior, para el caso en que O, A y B se encuentren alineados.

2. Demostrar que los ángulos homotéticos son congruentes.



2.5 EJEMPLO

En un cuadrado ABCD se toma un punto E sobre la diagonal $\overline{AC}$ tal que $\overline{AE}=\overline{AB}$. Dada la homotecia $H_{A,k}$ que transforma E en C y un punto P cualquiera, construir la imagen P' de dicho punto y calcular la razón.



1. Como la recta EP tendrá como imagen a CP' y éstas rectas deben ser paralelas, podemos hallar P' cortando la recta paralela a EP por C con la recta AP.
2. Para hallar k, debemos calcular la razón $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

Como $\overline{AE}=\overline{AB}$,y , $\overline{AC}$ por ser la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}\,.\overline{AB}$ (Pitágoras),

se cumple que $k=\frac{\sqrt{2}\overline{AB}}{\overline{AB}}=\sqrt{2}$

Si en lugar de dos puntos correspondientes, el dato del problema es la razón k= m/n, se construyen sobre una recta que pase por el centro, dos puntos cuya distancia a éste sean m y n y luego se repite el procedimiento de las paralelas.

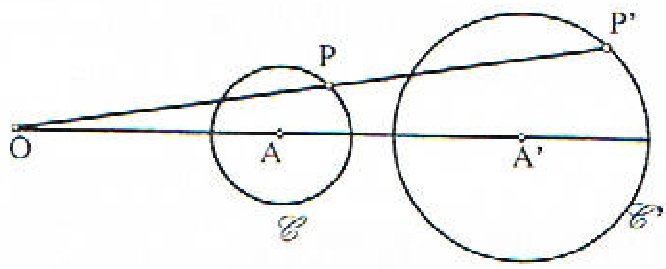
3. CIRCUNFERENCIAS HOMOTETICAS

3.1. Imagen de una circunferencia

La imagen de una circunferencia de centro A y radio r, en la homotecia $H_{O,k}$,es otra circunferencia de centro A' alineado con A y O y radio $r' = r.|k|$.

Demostración

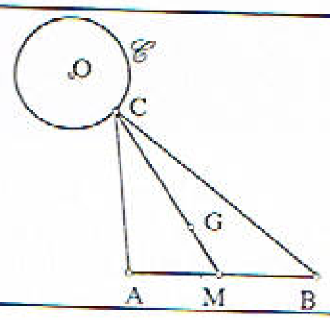
Para todo punto $P \in \mathscr{C}$ y su imagen P' en la homotecia $H_{O,k}$ se cumple que: $\frac{\overline{A'P'}}{\overline{AP}}=|k|$ (Thales) y como $\overline{AP}= r$ entonces $\overline{A'P'}= r.|k|$ de donde P' pertenece a la circunferencia de centro A' y radio $r.|k|$.



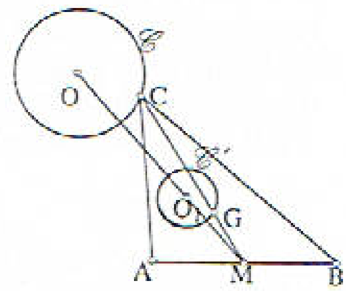
Recíprocamente todo punto $P' \in \mathscr{C}'$ tiene una preimagen en $\mathscr{C}$, pues basta considerar la homotecia inversa $H^{-1}_{O,k}= H_{O,1/k}$ que los hace corresponder.

3.2 EJEMPLO

Sea una cfa. $\mathscr{C}$, y un segmento $\overline{AB}$ exterior.
Se considera un punto C variable sobre la circunferencia
Hallar el lugar geométrico del baricentro G, de los triángulos $\widehat{ABC}$.



Considerando la propiedad del baricentro, en la que éste dista del punto medio del lado un tercio de la mediana; se puede afirmar que G es el transformado de C en una homotecia de centro M (punto medio de $\overline{AB}$) y razón 1/3 pues: M fijo, M, C y G alineados y $\frac{\overline{MG}}{\overline{MC}}=\frac{1}{3}$.



Entonces $G = H_{M,1/3}(C)$ y como $C\in\mathscr{C}$, se cumplirá que $G\in\mathscr{C}_1$, siendo $\mathscr{C}' = H_{M,1/3}(\mathscr{C})$. Para hallar $\mathscr{C}'$ se homotetiza el centro O en O_1, siendo el radio, $O_1G = 1/3\ \overline{OC}$. A su vez todo punto de $\mathscr{C}'$ tiene una preimagen en $\mathscr{C}$ pues existe la homotecia inversa que transforma G en C (homotecia de centro M y razón 3). Se concluye que el lugar geométrico de G al variar C es $\mathscr{C}'$.

3.3 Homotecias que transforman circunferencias

Dadas dos circunferencias de radios diferentes, no concéntricas, existen dos homotecias, una de razón positiva y otra de razón negativa que transforman una circunferencia en otra.

Hipótesis:

$\mathscr{C}=\mathscr{C}_{A,r}$, $\mathscr{C}'=\mathscr{C}_{B,r'}$

$r\neq r'$, $A\neq B$

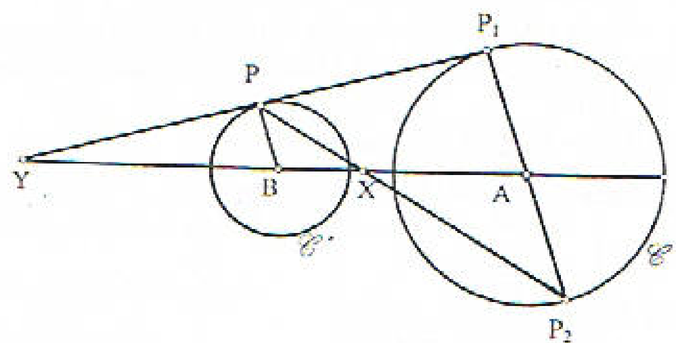
Tesis:

Existen X eY y k>O, tal que $H_{Y,k}(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$

$H_{X,-k}(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$

Demostración

Sean un punto cualquiera $P\in\mathscr{C}'$ y $\overline{P_1P_2}$ un diámetro de $\mathscr{C}$ paralelo a BP. En estas condiciones existen siempre dos puntos X e Y tales que $\{X\}=PP_2\cap AB$, e $\{Y\}=PP_1\cap AB$ con $X\in\overline{AB}$ e $Y\notin\overline{AB}$. La construcción precedente nos permite afirmar que (A,B,X,Y) constituye una cuaterna armónica y como



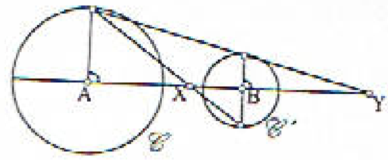
$\overline{AP_1}=\overline{AP_2}=r$ y $\overline{BP}=r'$, entonces se cumple que $\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}=\frac{\overline{YB}}{\overline{YA}}=\frac{r'}{r}$.Tomando $\frac{r'}{r}=k>O$ y aplicando la definición de homotecia, podemos concluir que

$H_{X,-k}(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$ y $H_{Y,k}(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$

3.4 EJEMPLO

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos cfas. de radios 2 y 1 y centros A y B respectivamente, con $\overline{AB}=4$. Hallar centro y razón de cada una de las homotecias que transforman $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ y hallar la distancia entre los centros de las homotecias.

Sean k' y k'' las razones de las homotecias y X e Y sus respectivos centros. Las razones se hallan mediante las medidas de los radios y considerando el signo, entonces k'=1/2 y k''= -1/2. Para hallar los centros, se construye la cuaterna armónica (ABXY), por lo que, mediante radios paralelos se hallan X e Y, según figura. Para calcular $\overline{XY}$, si se considera que con A y B forman una cuaterna armónica, se cumple que: $\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}=\frac{\overline{YB}}{\overline{YA}}=\frac{1}{2}$



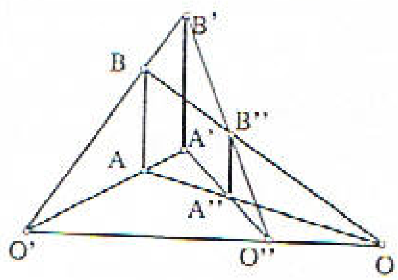
Se puede deducir que $2\overline{YB}=\overline{YA}$ y $2\overline{XB}=\overline{XA}$. Además $XA+\overline{XB}=4$; $\overline{YA}=4+\overline{YB}$ y como $XY=XB+YB$; combinando las igualdades y efectuando operaciones resulta $\overline{XY}=16/3$.

4. ESTRUCTURA DE GRUPO

El conjunto de las homotecias del plano H*, y la composición "∘", forman una estructura de grupo, con la restricción de que el producto de los valores absolutos de las razones sea distinto de 1.

Se deberá probar que :

1) "∘" es ley de composición interna
2) Asociativa
3) Neutro
4) Inverso



1) Probaremos que la composición de dos homotecias , $H_{O',k'}$ y $H_{O'',k''}$. es otra homotecia de centro O, alineado con O' y O'' y razón k, con k=k'.k'', (| k'.k''| ≠ 1).

Para todo par de puntos A,B del plano se cumple que si

$$\overleftrightarrow{AB} \xrightarrow{H_{O',k'}} \overleftrightarrow{A'B'} \xrightarrow{H_{O'',k''}} \overleftrightarrow{A''B''}$$

Entonces: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=|k'|$ $\quad \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}=|k''|$

Por lo que: $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}=|k'k''|$

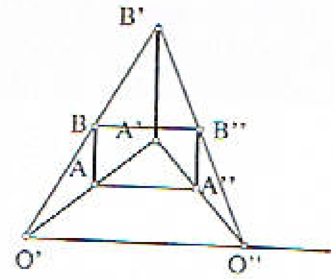
Además AB || A'B' y A'B' || A''B'', entonces AB || A''B'' Como $|k'|.|k''| \neq 1$ existe un punto {O}=AA'' ∩ BB'' de donde $\overline{A''B''} = H_{O,k}(\overline{AB})$, con k= k'.k''.
Como la recta O'O'' es doble en $H_{O',k'}$ y $H_{O'',k''}$ también será doble en $H_{O,k}$ de modo que O debe pertenecer a dicha recta.

Haciendo uso de las propiedades de la multiplicación en el conjunto de los reales. probar la propiedad asociativa, la existencia del neutro (homotecia de razón 1) y existencia de la homotecia inversa (razón 1/k).

Caso particular: $|k|\ |k'|=1$

Razonando en forma análoga se llega a la conclusión:

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}=|k|.|k'|=1$$



De donde $\overline{A''B''}=\overline{AB}$ con $A''B'' \parallel AB$

En este caso los segmentos correspondientes son de igual medida, paralelos y de igual sentido, por lo que, la función que los hace corresponder es una traslación cuyo vector es paralelo a la recta de los centros.

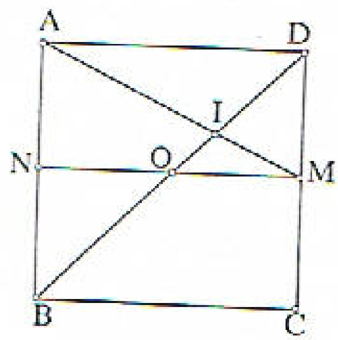
4.1 EJERCICIOS TEORICOS

1) Probar que el conjunto de las homotecias de igual centro H_O*y la composición de homotecias, "$\circ$", forman una estructura de grupo conmutativo.
2) Probar que la función compuesta de una homotecia $H_{O,k}$ y una traslación de vector $\vec{u}$ es una homotecia de igual razón que la primera, y cuyo centro O' es tal que la recta OO' tiene la dirección del vector.

4.2 EJEMPLO

En un cuadrado ABCD, de centro O sean M punto medio de $\overline{CD}$ y N punto medio de $\overline{AB}$.

a) Hallar la razón k' tal que $H_{O,k'}(M) = N$
b) Hallar la razón k'' tal que $H_{B,k''}(N) = A$
c) Hallar centro I y razón k tal que $H_{I,k} = H_{B,k''} \circ H_{O,k'}$



a) La razón k', se halla efectuando la razón entre la medida de dos segmentos correspondientes o sea $|k'|=\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$

Y considerando que $\overline{OM}=\overline{ON}$ y que M y N están en semirrectas opuestas respecto de O, entonces k'= -1

b) $|k''|=\frac{\overline{BA}}{\overline{BN}}$ De donde k''= 2 pues N y B están en la misma semirrecta de origen B y $\overline{BA}=2\overline{BN}$.

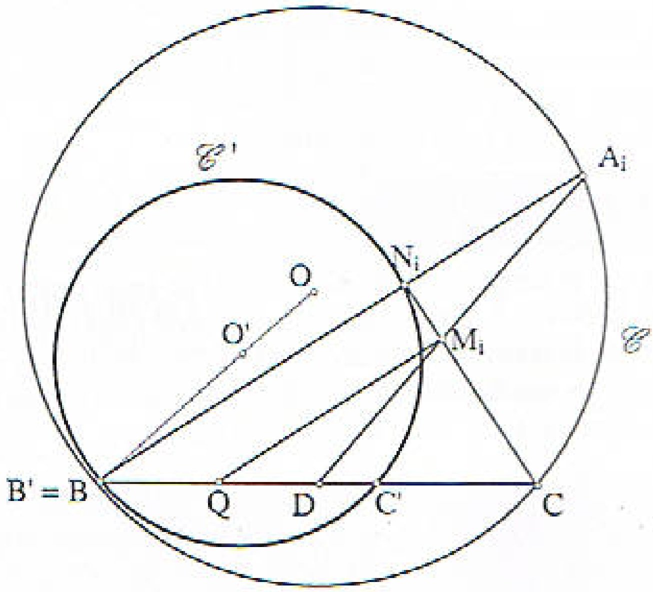
c) Como $H_{O,-1}(M)= N$ y $H_{B,2}(N)= A$, entonces $H_{I,k}(M)= A$

Para hallar I se interseca la recta de los centros OB con la recta que contiene dos puntos correspondientes AM.

La razón se halla como k=k'.k''o sea k= -2

4.3 EJEMPLO

$\overline{BC}$ es una cuerda fija de una circunferencia $\mathscr{C}$ fija de centro O.
El punto A varía en $\mathscr{C}$.
Sea D el punto medio de $\overline{BC}$ y M el punto medio de $\overline{AD}$.
Sea N el punto intersección de las rectas CM y AB.
Hallar el lugar geométrico de N



Como D es fijo y $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DA}} = \dfrac{1}{2}$, se cumple que $\boxed{M = H_{D,1/2}(A)}$

Sea Q el punto medio de BD, entonces $\overline{QM}$ es paralela media en el $\widehat{ABD}$.

Por el teorema de Thales., se puede afirmar que $\dfrac{\overline{CN}}{CM} = \dfrac{\overline{CB}}{CQ}$, y como $\dfrac{\overline{CB}}{CQ} = \dfrac{4}{3}$,

entonces $\boxed{N = H_{C,4/3}(M)}$

De las dos afirmaciones recuadradas se deduce que $N = H_{C,4/3}(H_{D,1/2}(A))$.
La composición $H_{C,4/3} \circ H_{D,1/2}$ será una homotecia de razón 4/3.1/2 = 2/3 y cuyo centro es la intersección de CD y AN, o sea B.
Luego se cumplirá que $H_{B,2/3}(A) = N$, de donde el lugar geométrico de N será la circunferencia $\mathscr{C}' = H_{B,2/3}(\mathscr{C})$

❖ Deben excluirse de $\mathscr{C}'$, los puntos B' y C', imágenes de B y C.

5. EJERCICIOS

1) Se dan 3 puntos A,B,C alineados y una cfa. ($\mathscr{C}$) exterior de centro O. Se considera la homotecia $H_{A,k}$ que transforma B en C.
Construir las imágenes de la recta BO, el triángulo $\widehat{BOC}$ y la cfa. $\mathscr{C}$ en las homotecias $H_{A,k}$ y $H_{A,-k/2}$.

2) Dado un trapecio ABCD , AB $\parallel$ CD, y un punto exterior P, construir la imagen de P en la homotecia que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

3) Se consideran dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ no congruentes y de lados paralelos dos a dos. Sea AA' $\cap$ BB' $=\{O\}$. Deducir que O, C y C' están alineados.

4) Sea un cuadrado ABCD y un punto O exterior, tal que O$\notin$ (AB,C). Construir un cuadrado A'B'C'D' con A'$\in$ $\overline{OA}$, B'$\in$ $\overline{OB}$ y $\overline{C'D'}$ incluido en AB.

5) Sea una recta (r), en ella un punto variable B y un punto exterior A fijo. Lugar geométrico del punto medio de $\overline{AB}$.

6) Sea una cfa. $\mathscr{C}$, una cuerda fija $\overline{AB}$ y un punto C variable en $\mathscr{C}$.
   a) Lugar geométrico del punto medio M de $\overline{AC}$.
   b) Lugar geométrico del baricentro del $\widehat{ABC}$.

7) Sea una cfa. $\mathscr{C}$ y en ella dos puntos fijos A y B, y C variable en el arco mayor AB. Se construyen los paralelogramos ABPC antihorarios.
   a) Lugar geométrico de M punto medio de $\overline{BC}$.
   b) Lugar geométrico del baricentro del $\widehat{BPC}$.
   c) Lugar geométrico de P.

8) Se da una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O. Por un punto A fijo se traza la tangente (t) (A$\in\mathscr{C}$). Sobre (t) se toma un punto P variable y se traza la otra tangente a la cfa., siendo B el punto de tangencia.
   a) Probar que A,O,B,P son concíclicos.
   b) Lugar geométrico del circuncentro del $\widehat{ABP}$.

9) Se considera un rectángulo ABCD horario y un punto E$\in$ AB tal que
$\overline{BE}=\dfrac{\overline{AB}}{2}$ $(A \prec B \prec E)$ EC $\cap$ AD$=\{F\}$ EC$\cap$DB$=\{O\}$
   a) Hallar k' tal que $H_{B,k'}(E)=A$
   b) Halla k'' tal que $H_{D,k''}(A)=F$
   c) Hallar $H_{P,k} = H_{D,k''} \circ H_{B,k'}$

10) Sean dos cfas. tangentes exteriores, en un punto A, $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$, de centros O' y O'' y radios 2 y 5 respectivamente.
Sean P y Q variables $P\in\mathscr{C}'$, $Q\in\mathscr{C}''$, $\widehat{PAQ}=90^\circ$
 a) Demostrar que $O'P \parallel O''Q$.
 b) Hallar centro y razón de la homotecia que transforma $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{C}''$ y P en Q.
 c) Lugar geométrico del punto medio M de $\overline{PQ}$.

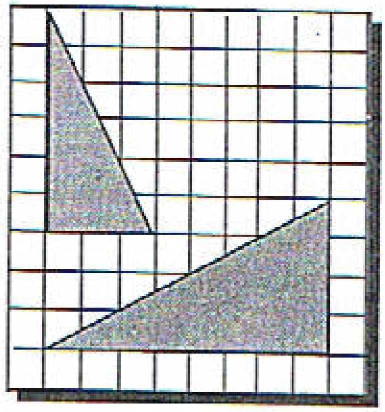
11) Sea una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y radio 2, y un punto A exterior fijo, tal que $\overline{AO}=6$. Se considera P variable en $\mathscr{C}$. La bz. del $\widehat{AOP}$ corta a AP en H.
 a) Calcular $\overline{AH}$ en función de $\overline{AP}$. Sugerencia: usar teorema de la bz..
 b) Lugar geométrico de H.

12) Se considera $\widehat{aOb}$ horario. Sobre $\overline{Ob}$ se toma B fijo y sobre $\overline{Oa}$ A variable. Se construyen los paralelogramos OBCA.
 a) Lugar geométrico del punto medio de $\overline{AB}$.
 b) Lugar geométrico del baricentro G del $\overset{\triangle}{ABC}$.
 c) Sea G' baricentro del $\overset{\triangle}{OAB}$. Hallar una transformación f tal que f(G)=G'.
 d) Lugar geométrico de G'.

13) Se da un $\overset{\triangle}{ABC}$ con $\overline{AB}$ fijo y C variable de modo que $\overline{BC}=x$ constante.
 a) Lugar geométrico del punto medio M de $\overline{BC}$.
 b) Sea $H_{O,k}$ la homotecia que transforma C en M. Se considera $H_{A,2/3}$. Demostrar que $H_{A,2/3} \circ H_{O,k}=H_{P,1/3}$, siendo P punto medio de $\overline{AB}$.

CAPITULO 12

SEMEJANZA



1. DEFINICION

Se define semejanza de razón k,(real positivo) y que anotaremos Σ_k, a una función del plano en el plano que cumple:

1) Σ_k es función biyectiva.
2) Para todo par de puntos X,Y del plano y sus imágenes X',Y' en la semejanza, se verifica que $\overline{X'Y'} = k \cdot \overline{XY}$

2. LA SEMEJANZA COMO COMPOSICION

Toda semejanza es la composición de una homotecia con una isometría, o de una isometría con una homotecia.

Demostración

Se probará que para cada semejanza Σ_k y para cada punto O del plano, si $H = H_{O,k'}$, es la homotecia de centro O y razón k', tal que $k = |k'|$ existe una única isometría **f**, tal que $\Sigma_k = f \circ H$. Si se considera la homotecia inversa H^{-1} de razón 1/k', queda determinada la función $f = \Sigma_k \circ H^{-1}$. Se demostrará que **f** es una isometría. Obsérvese que **f** es biyectiva por serlo Σ_k y H^{-1}.

Analicemos las siguientes transformaciones: $\overset{\frown}{XY} \xrightarrow{H^{-1}} \overset{\frown}{X'Y'} \xrightarrow{\Sigma_k} \overset{\frown}{X''Y''}$

$\boxed{\overline{X'Y'} = |1/k'| \, .\overline{XY}}$ $\boxed{\overline{X''Y''} = k.\overline{X'Y'}}$

Combinando ambas igualdades se cumple que $\overline{X''Y''} = \overline{XY}$, entonces **f** es una función biyectiva que conserva las distancias, o sea, una isometría. Como $f = \Sigma_k \circ H^{-1}$, si se compone a ambos lados de la igualdad con **H**, se cumplirá que $f \circ H = \Sigma_k \circ H^{-1} \circ H$, de donde $\Sigma_k = f \circ H$ como se quería demostrar. Si existieran dos funciones f y f ' en las condiciones iniciales, tales que $\Sigma_k = f \circ H = f' \circ H$, componiendo a ambos lados de la igualdad a la derecha con H^{-1}, se obtiene que $f = f'$, lo que prueba la unicidad.

❖ El lector interesado en profundizar, puede demostrar el caso restante de este teorema, y la validez del recíproco.

3. ESTRUCTURA DE GRUPO

El conjunto de las semejanzas del plano, S*, con la composición "∘", forman una estructura algebraica de grupo.

Demostración

Probaremos en primer lugar que "∘" es una ley de composición interna en S*, o sea que la composición de dos semejanzas es una semejanza cuya razón es el producto de las dos primeras. Veamos el comportamiento de un par de puntos X,Y en la composición :

$$\overline{XY} \xrightarrow{\Sigma_{k'}} \overline{X'Y'} \xrightarrow{\Sigma_{k''}} \overline{X''Y''}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \Sigma_{k'} \text{ se cumple que } \overline{X'Y'} = k'.\overline{XY} \\ \text{En } \Sigma_{k''} \text{ se cumple que } \overline{X''Y''} = k''.\overline{X'Y'} \end{array}\right\} \overline{X''Y''} = k''.(k'.\overline{XY}) \Rightarrow \overline{X''Y''} = (k'.k'').\overline{XY}$$

Además como $\Sigma_{k'}$ y $\Sigma_{k''}$ son funciones biyectivas, su composición también lo es, por lo que se puede afirmar entonces que $\Sigma_{k''} \circ \Sigma_{k'} = \Sigma_{k'.k''}$.
El neutro del grupo será la semejanza de razón 1,(es el compuesto de la isometría identidad con la homotecia de razón 1); la semejanza inversa de $\Sigma_k = f \circ H_{O,k'}$, será $\Sigma^{-1}_k = H_{O,1/K'} \circ f^{-1}$ y finalmente la composición de semejanzas es asociativa pues la composición de funciones biyectivas del plano en el plano es asociativa.

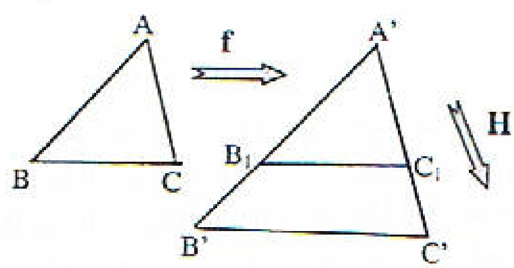
4. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Si dos triángulos son semejantes ($\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$), se cumplirá que sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales, o sea ,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$$

y $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

Las demostraciones de los criterios , consisten en determinar la isometría f que transforma ABC en $A'B_1C_1$(ver figura), y luego aplicar la homotecia de centro A' y razón k que transformará $\widehat{A'B_1C_1}$ en $\widehat{A'B'C'}$



Como la composición de una isometría con una homotecia es una semejanza ,los triángulos considerados serán semejantes.

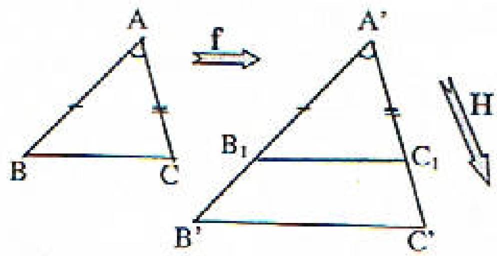
4.1 PRIMER CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Si dos triángulos tienen un ángulo congruente y las longitudes de los lados que éstos determinan proporcionales, entonces son semejantes.

Hipótesis: $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ Tesis: $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

Demostración

Por axioma métrico es posible afirmar que existen los puntos $B_1 \in \overline{A'B'}$ y $C_1 \in \overline{A'C'}$ tales que $\overline{AB}=\overline{A'B_1}$ y $\overline{AC}=\overline{A'C_1}$. Además como $\widehat{A}=\widehat{A'}$, y aplicando el criterio de congruencia de triángulos L.A.L. se cumplirá que $\widehat{ABC}=\widehat{A'B_1C_1}$, lo que implica que existe la isometría $f: \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B_1C_1}$



Considerando que $\overline{AB}=\overline{A'B_1}$, $\overline{AC}=\overline{A'C_1}$ y que por hipótesis se cumple que $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, entonces se cumplirá que $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B_1}}=\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'C_1}}$, lo cual nos permite afirmar que existe la homotecia de centro A' y razón $k=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $H_{A',k}: \widehat{A'B_1C_1} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$, de donde resulta la tesis.

4.2 SEGUNDO CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

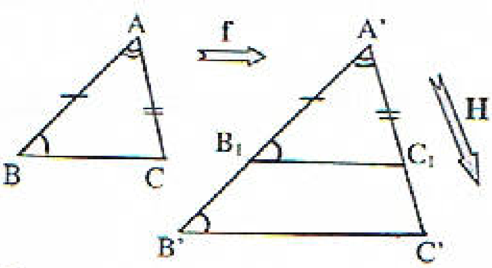
Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.

Hipótesis: $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$ Tesis: $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

Demostración

Razonando en forma análoga al criterio anterior se cumple que existe la isometría $f: \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B_1C_1}$.

Además como $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$ (hipótesis), y $\widehat{ABC}=\widehat{A'B_1C_1}$ (por la congruencia de los triángulos $\widehat{ABC}$ Y $\widehat{A'B_1C_1}$), al estar estos ángulos en posición de correspondientes, se cumple que $B_1C_1 \parallel B'C'$ y aplicando Thales $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B_1}}=\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'C_1}}$.



Como $\overline{A'B_1}=\overline{AB}$ y $\overline{A'C_1}=\overline{AC}$ es posible afirmar que existe la homotecia $H_{A',k}: \widehat{A'B_1C_1} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$, de donde $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$.

4.3 TERCER CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

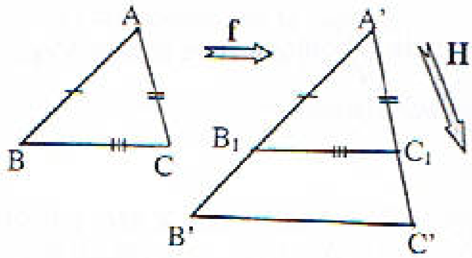
Si dos triángulos tienen las longitudes de sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

Hipótesis: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ Tesis : $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

Demostración

Por axioma métrico existen los puntos $B_1 \in \overrightarrow{A'B'}$ y $C_1 \in \overrightarrow{A'C'}$ tales que $\overline{AB} = \overline{A'B_1}$ y $\overline{AC} = \overline{A'C_1}$ *

$$\Rightarrow \underset{\text{hipótesis}}{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}} \underset{*}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B_1}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'C_1}} \underset{\text{recíproco de Thales}}{\Rightarrow} B_1C_1 \parallel B'C' \underset{\text{Thales en triángulos}}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B_1}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B_1C_1}} \underset{*}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B_1C_1}}$$



De esta última afirmación y considerando la hipótesis $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$, por la unicidad del cuarto proporcional se puede afirmar que $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$. Al aplicar el criterio de congruencia de triángulos L.L.L. se cumple que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B_1C_1}$, de donde existe la isometría $f : \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B_1C_1}$.

Finalmente como $B_1C_1 \parallel B'C'$, existe la homotecia $H_{A',k} : \widehat{A'B_1C_1} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$, de donde se concluye que $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$

4.4 EJERCICIOS TEORICOS

1) Probar que dos triángulos rectángulos con catetos de longitudes proporcionales, son semejantes.

2) Probar que dos triángulos cuyos lados son paralelos dos a dos, son semejantes.

4.5 EJEMPLO

Construir un triángulo $\widehat{ABC}$, conociendo las medidas de sus tres alturas h_A, h_B y h_C

h_A ______ h_B ______ h_C ______

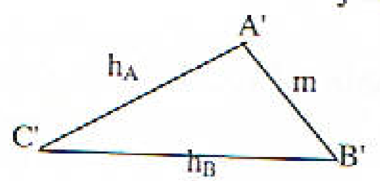
Si llamamos a , b, y c , a las medidas de los lados , se cumplirá que el área del $\widehat{ABC}$ es igual a $\dfrac{a.h_A}{2}=\dfrac{b.h_B}{2}=\dfrac{c.h_C}{2}$.

Si se divide entre $h_A.h_B$, a todos los miembros de la igualdad resultará que

$$\frac{a}{h_B}=\frac{b}{h_A}=\frac{c}{\dfrac{h_A.h_B}{h_C}}.$$

Si denominamos $m=\dfrac{h_A.h_B}{h_C}$, m será el cuarto proporcional entre las tres alturas dadas.

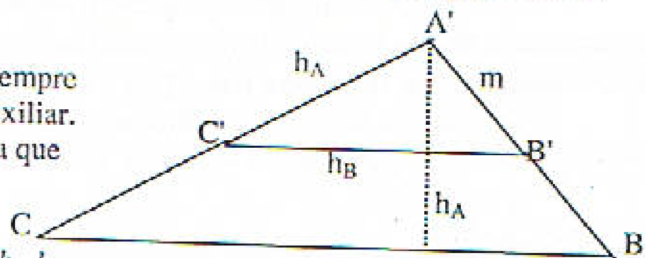
Se tiene entonces que $\dfrac{a}{h_B}=\dfrac{b}{h_A}=\dfrac{c}{m}$. Si ahora se considera un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ cuyos lados midan h_A , h_B y m, resultará que $\widehat{ABC}\approx\widehat{A'B'C'}$ (tercer criterio de semejanza de triángulos). Como el A'B'C' puede construirse, ya que conocemos sus tres lados, el triángulo $\widehat{ABC}$ deberá buscarse entre los triángulos semejantes al ya construido $\widehat{A'B'C'}$.



El $\widehat{ABC}$ se determina fácilmente, ya que se puede utilizar , para ello, cualquiera de las tres alturas como indica la figura inferior.

Condición de posibilidad

El problema será resoluble, siempre que sea posible construir el $\widehat{A'B'C'}$ auxiliar. Como sus lados son h_A , h_B y m, para que el triángulo pueda construirse se deberá de cumplir que :



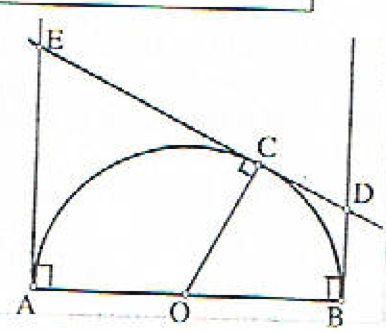
$$h_A - h_B < m < h_A + h_B \iff h_A - h_B < \frac{h_A.h_B}{h_C} < h_A + h_B$$

y dividiendo entre entre $h_A.h_B$ resulta la condición : $\boxed{\dfrac{1}{h_B}-\dfrac{1}{h_A}<\dfrac{1}{h_C}<\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_A}}$

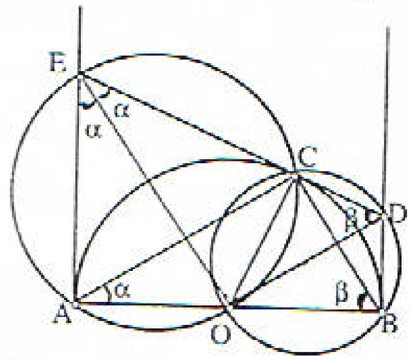
4.6 EJEMPLO

Sea una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ centro O y radio r, y un punto C de ella. Por A,B y C se trazan las tangentes a la semicircunferencia que se cortan en E y D según figura. Demostrar que :

1)los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{EDO}$ son semejantes.
2)los triángulos $\widehat{EAO}$ y $\widehat{OBD}$ son semejantes.
3) $\overline{EA}.\overline{DB}=r^2$



1) En el triángulo $\widehat{ABC}$, sean $\widehat{A} = \alpha$ y $\widehat{B} = \beta$
El cuadrilátero OAEC es inscriptible pues tiene dos ángulos opuestos rectos. Se cumple entonces que $\widehat{CEO} = \widehat{CAO} = \alpha$ por estar inscritos con una misma cuerda $\overline{OC}$.
Razonando igual para el cuadrilátero OBDC, se cumple que $\widehat{CDO} = \widehat{CBO} = \beta$.
Se concluye que $\widehat{ABC} \approx \widehat{EDO}$, pues tienen dos ángulos congruentes (2° criterio de semejanza).



2) Como $\overline{OA} = \overline{OC}$, se cumplirá que $AEO = CEO = \alpha$ (a cuerdas congruentes corresponden ángulos inscriptos congruentes).
Razonando igual para $\overline{OC} = \overline{OB}$ también se cumplirá que $\widehat{CDO} = \widehat{BDO} = \beta$.
Se concluye que $\widehat{EAO} \approx \widehat{OBD}$, pues tienen dos ángulos congruentes.

3) Como $\widehat{EAO} \approx \widehat{OBD}$, se verifica la proporcionalidad entre sus lados: $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{AO}} = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{DB}}$,
entonces como $\overline{AO} = \overline{BO} = r$, se concluye que $\overline{EA} \cdot \overline{DB} = r^2$

5. SEMEJANZAS DIRECTAS E INDIRECTAS

Considerando que toda semejanza es la composición de una isometría con una homotecia, y que las homotecias conservan el sentido en el plano, la semejanza será una transformación directa, si la isometría es directa, y en caso contrario, indirecta..

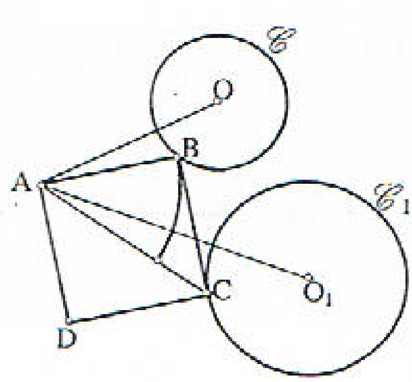
Toda semejanza directa de razón distinta de 1, puede expresarse como la composición de una rotación $R_{O,\vec{\varphi}}$ con una homotecia $H_{O,k}$ de igual centro, llamada rotohomotecia, que se anotará $RH_{O,\vec{\varphi},k}$,

A su vez toda semejanza indirecta de razón distinta de 1, puede expresarse como la composición de una simetría axial con una homotecia.

5.1 EJEMPLO

Sea una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio r, y un punto exterior A fijo. Se construyen los cuadrados ABCD horarios, con B variable en la circunferencia. Hallar el lugar geométrico del punto C.

Se demostrará que el punto C es el transformado de B, en una rotohomotecia de centro A. Obsérvese que el ángulo $\widehat{BAC}$ se mantiene constante en la transformación, ya que $BAC = 45°$, en sentido horario, ($\overline{AC}$ diagonal del cuadrado), y la razón k, también se mantiene constante, pues como $\overline{AC} = \sqrt{2}\,.\overline{AB}$ (Pitágoras) ,se cumplirá que $k = \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$



En base a lo expresado anteriormente se puede afirmar que : $B \xrightarrow{RH_{O,-45^\circ,\sqrt{2}}} C$

por lo que C pertenecerá a la circunferencia $\mathscr{C}_1$, correspondiente de $\mathscr{C}$ en dicha rotohomotecia. Así mismo a todo punto de $\mathscr{C}_1$ le corresponderá un punto de $\mathscr{C}$ en la semejanza inversa (centro A, ángulo 45° antihorario y razón $1/\sqrt{2}$), de donde se concluye que $\mathscr{C}_1$ es el lugar geométrico del punto C, al variar B en la cfa.

Para construir $\mathscr{C}_1$, se gira el centro O de $\mathscr{C}$, 45° en sentido horario, y luego al punto girado , se le aplica la homotecia de centro A y razón $\sqrt{2}$, obteniéndose O_1. El radio será $r_1 = \overline{O_1C} = \sqrt{2}\,.\,r$

6. CENTRO DE SEMEJANZA

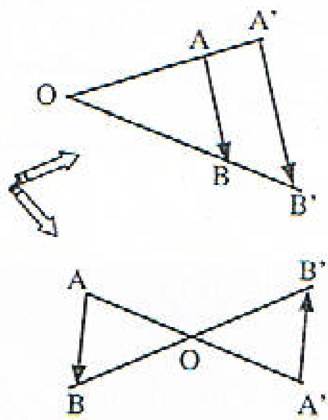
Toda semejanza de razón distinta de 1, admite un único punto unido llamado centro de semejanza. Demostraremos a continuación su existencia y unicidad y detallaremos su construcción dados dos segmentos correspondientes.

6.1 Unicidad

Sea una semejanza Σ_k , $k \neq 1$ y supongamos por absurdo que existen dos puntos unidos O y U. Como $\Sigma_k(\overleftrightarrow{OU}) = \overleftrightarrow{OU}$, entonces por definición $\overline{OU} = k.\overline{OU}$, o sea $k=1$, contra la hipótesis de $k \neq 1$. Por lo que, si existe el punto unido, es único.

6.2 Existencia y determinación del centro de semejanza directa

Sea Σ_k , $k \neq 1$ una semejanza directa y A,B dos puntos cualesquiera tal que $\Sigma_k(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{A'B'}$.



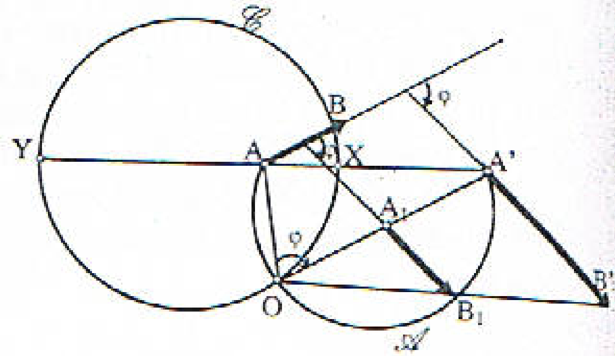
- Si AB || A'B' la semejanza se reduce a una homotecia de centro (O) =AA' ∩ BB'. Siendo O el centro de semejanza y $k = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, su razón.

- Si AB no es paralela a A'B' expresaremos la semejanza directa como una rotohomotecia $\Sigma_k = H_{O,k'} \circ R_{O,\vec{\varphi}}$. El único punto unido en la rotación y en la homotecia es O, por lo que dicho punto será el centro de la semejanza.

Consideremos las siguientes transformaciones:

$$\overleftrightarrow{AB} \xrightarrow{R_{O,\vec{\varphi}}} \overleftrightarrow{A_1B_1} \xrightarrow{H_{O,k'}} \overleftrightarrow{A'B'}$$

En primer lugar se deduce la razón de la semejanza como $k=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.



Considerando que O es unido, se cumplirá por definición que $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=k$, por lo que O pertenecerá a la circunferencia de Apolonio referida a los puntos A y A' y de razón k.
Se deduce a continuación el ángulo de giro $\vec{\varphi}$. Por propiedad de rotación, se puede afirmar que $\vec{\varphi}$ es igual al ángulo suplementario del ángulo formado por las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ con sus semiplanos respectivos (los dos a la derecha o izquierda, pues la rotación es isometría directa); además como $A_1B_1 \parallel A'B'$ (propiedad de la homotecia), el ángulo $\vec{\varphi}$ queda determinado por el suplementario del formado por las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$.

Como O, A_1 y A' están alineados y $\widehat{AOA_1}=\vec{\varphi}$ se cumple que $\widehat{AOA'}=\vec{\varphi}$. De donde O pertenecerá al arco capaz de segmento $\overline{AA'}$ y ángulo $\vec{\varphi}$.

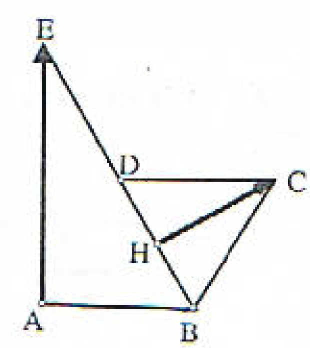
La intersección del arco capaz con la cfa. de Apolonio determinará el centro de semejanza.

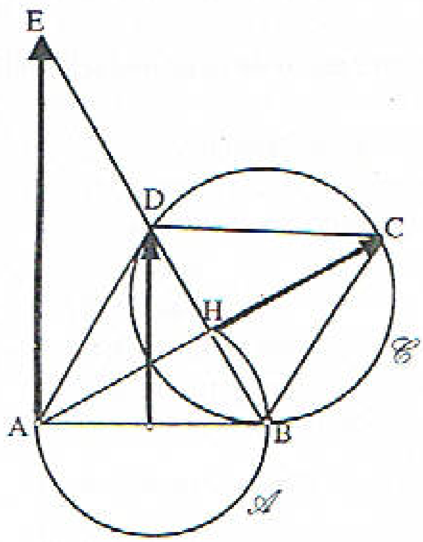
Construcción

1) Se construye la cfa. de Apolonio 𝒞 para los puntos A y A' y razón $k=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.
2) Se construye el arco capaz 𝒜 de segmento $\overline{AA'}$ y ángulo $\vec{\varphi}$ determinado por las semirrectas AB y A'B'. De los dos arcos capaces posibles, hay que construir el que determine un ángulo orientado AOA' en el mismo sentido que $\vec{\varphi}$ o sea desde $\overrightarrow{AB}$ hacia $\overrightarrow{A'B'}$.
3) El centro de semejanza O queda determinado como $\{O\}=\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$.

6.3 EJEMPLO

Se considera el triángulo rectángulo $\widehat{ABE}$ de la figura, de medidas $\overline{AB}=x$ y $\overline{BE}=2x$. Sean D el punto medio de $\overline{BE}$ y H de $\overline{BD}$.
Se construye el triángulo equilátero $\widehat{BDC}$ y su altura $\overline{HC}$
1) Hallar centro ángulo y razón de la semejanza directa (rotohomotecia) que transforma $\overrightarrow{HC}$ en $\overrightarrow{AE}$
2) Hallar la imagen del triángulo $\widehat{BDC}$ en la semejanza, y verificar que la razón entre las áreas de dichos triángulos es igual a k^2, siendo k la razón de la semejanza.





1) En primer lugar se hallará el ángulo de giro φ determinado por el suplementario del ángulo formado por las rectas orientadas AE y HC, con sus semiplanos respectivos (ambos a la derecha o izquierda, pues la semejanza es directa). Obsérvese que dicho ángulo es $\overrightarrow{HAE}$. El ángulo $\widehat{ABE}$ se puede deducir como :

$$\cos\widehat{B} = \frac{1x}{2x} \Longrightarrow \cos\widehat{B} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \widehat{B} = 60^\circ$$

entonces el triángulo $\widehat{ABD}$ resultará equilátero y en consecuencia el ángulo $\overrightarrow{HAE}$ será de 60° antihorario.

Por Pitágoras en $\widehat{ABE}$, se deduce que $\overline{AE} = \sqrt{3}.x$ y en $\widehat{BDC}$ la medida de la altura será de $\frac{\sqrt{3}}{2}.x$; por lo que la razón queda determinada por :$k = \frac{\overline{AE}}{\overline{HC}} = \frac{\sqrt{3}.x}{(\sqrt{3}/2).x} = 2$.

Para hallar el centro de semejanza, se construye la circunferencia de Apolonio $\mathscr{C}$, referida a los puntos A y H y de razón 2. Obsérvese que los puntos B y D deben pertenecer a la circunferencia pues $\frac{\overline{BA}}{\overline{BH}} = 2$ y $\frac{\overline{DA}}{\overline{DH}} = 2$.

A continuación se construye el arco capaz $\mathscr{A}$ de segmento $\overline{AH}$ y ángulo 60°. Como $\widehat{HBA} = 60°$, B debe pertenecer al arco.

El centro quedará determinado por $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, o sea el punto B.

2) En la rotohomotecia $RH_{B,60°,2}$ el triángulo $\widehat{BCD}$ tendrá como imagen a $\widehat{BED_1}$, pues B es unido y $C \rightarrow E$ por hipótesis. El punto D_1 se halla girando D, 60° con centro B (coincide el punto girado con A), y luego se le aplica la homotecia de centro B y razón 2.

El área del triángulo $\widehat{BED_1}$ será igual a $\frac{\overline{BD_1}.\overline{AE}}{2} = \frac{2x.\sqrt{3}.x}{2} = \sqrt{3}.x^2$

y el área del $\widehat{BCD}$ será $\frac{\overline{BD}.\overline{HC}}{2} = \frac{x.(\sqrt{3}/2).x}{2} = \frac{\sqrt{3}.x^2}{4}$

Efectuando la razón entre ambas áreas se tiene que $\frac{\sqrt{3}.x^2}{(\sqrt{3}/4).x^2} = 4$

o sea $k^2 = 4$ como se quería probar.

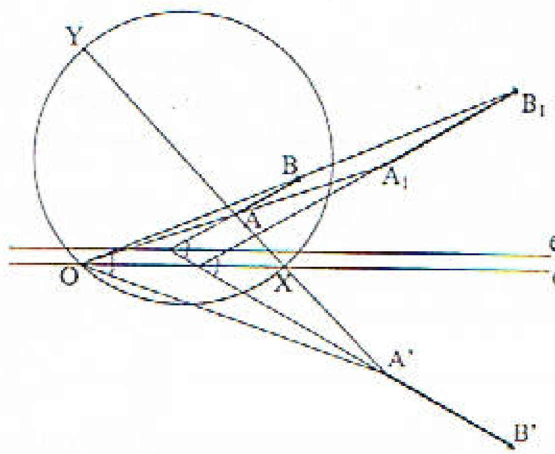
6.4 Existencia y determinación del centro de semejanza indirecta

6.4.1 El centro de la homotecia pertenece al eje de simetría

Toda semejanza indirecta puede expresarse como la composición de una homotecia con una simetría axial, o sea : $\Sigma_k = S_e \circ H_{O,k}$. Cuando el centro de la homotecia pertenece al eje de simetría , dicho punto será el centro de semejanza, pues permanece unido en ambas transformaciones.

Sean : $\overline{AB} \xrightarrow{H_{O,k}} \overline{A_1B_1} \xrightarrow{S_e} \overline{A'B'}$

Como O es unido en la semejanza , se cumplirá que $\Sigma_k(\overline{OA}) = \overline{OA'}$ y aplicando la definición de semejanza se puede afirmar que $\overline{OA'} = \overline{OA}.k$ por lo que $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$, de donde O pertenece a la circunferencia de Apolonio referida a los puntos A, A' y de razón k. Sea XY el diámetro de la circunferencia.



Observemos que $\overline{Ox}$ es bisectriz interior del ángulo $\widehat{AOA'}$ (propiedad de la circunferencia de Apolonio). Sea e = OX y (e') la recta que contiene la bisectriz del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ con sus semiplanos correspondientes. Como AB || A'B' se cumplirá que e || e'

Construcción del centro

Método 1

- Se construye la circunferencia de Apolonio $\mathscr{C}_{\overline{XY}}$, referida a los puntos A, A' y de razón k= $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
- Se halla (e'), bisectriz del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ con sus semiplanos correspondientes.
- Por X se traza el eje (e), paralelo a (e'). Su intersección con la circunferencia es el centro buscado.

Método 2

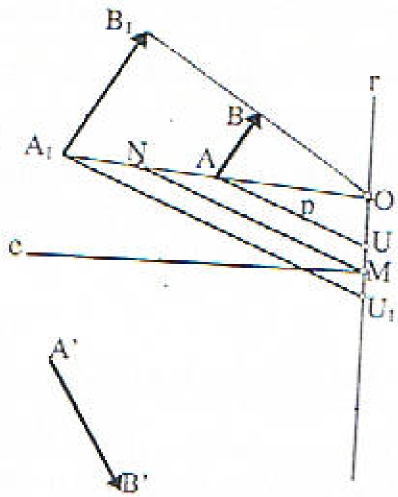
- Se halla X∈ $\overline{AA'}$ tal que $\dfrac{\overline{XA'}}{\overline{XA}} = k$ (ver capítulo 10 .6)
- Se construye (e')
- Por X se traza el eje (e) paralelo a (e')
- Se simetriza A' respecto de (e). $S_e(A') = A_1$
- El centro O queda determinado como: $\{O\} = AA_1 \cap e$

6.4.2 El centro de la homotecia no pertenece al eje de simetría

Dada una semejanza por una homotecia $H_{O,k}$ y una simetría axial S_e, en la que el centro de homotecia O no pertenece al eje de simetría, se explicará a continuación un procedimiento para hallar el centro de semejanza.

Sea U el centro de semejanza, entonces $\Sigma_k(U) = U$. Se consideran las siguientes transformaciones :

$$\begin{array}{ccccc} & H_{O,k} & & S_e & \\ U & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & U \\ \overrightarrow{AB} & \longrightarrow & \overrightarrow{A_1B_1} & \longrightarrow & \overrightarrow{A'B'} \end{array}$$



Observemos que O, U y U_1 deben estar alineados (propiedad de la homotecia) y además la recta UU_1 debe ser perpendicular al eje de la simetría axial, en consecuencia U pertenece a la perpendicular al eje por O. Sea (r).

Se consideran N y M puntos medios de $\overline{AA_1}$ y $\overline{UU_1}$. Por propiedad de la homotecia, se puede afirmar que $AU \parallel NM \parallel A_1U_1$ y como $\{M\} = r \cap e$, basta trazar la paralela a NM por A, y en su intersección con (r) esta el punto U buscado.

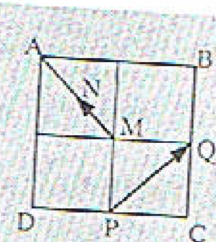
Construcción del centro

- Se traza la recta (r), perpendicular a (e) por O.
- Se hallan $\{M\} = r \cap e$ y N punto medio de $\overline{AA_1}$
- Por A se traza la paralela (p) a MN
- Se construye el centro $\{U\} = p \cap r$

6.5 EJEMPLO

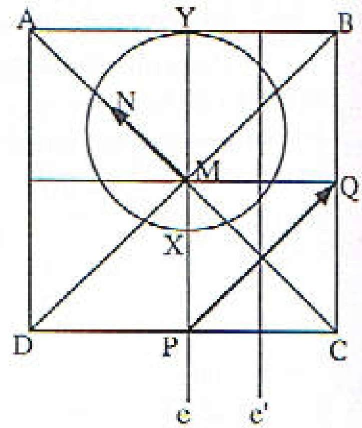
Se considera el cuadrado ABCD de centro M de la figura y N, P y Q puntos medios de $\overline{AM}$, $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

1) Hallar centro y eje de la semejanza indirecta que transforma
2) $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{MN}$.
3) Hallar la imagen del cuadrado ABCD en dicha semejanza.



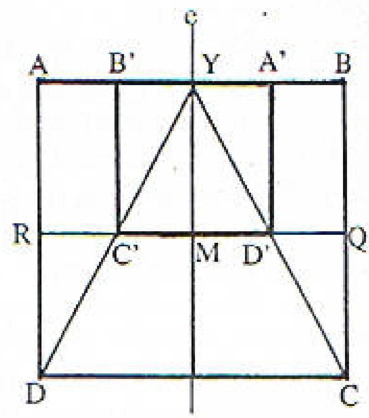
1) En primer lugar se determina la razón de la semejanza k.
Sea x la medida del lado del cuadrado. Aplicando el teorema de Pitágoras es posible deducir que $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ y que $\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, lo que implica que la razón será $k = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{2}$

A continuación se construye la circunferencia de Apolonio referida a los puntos P y M y de razón ½. Seguidamente se halla la bisectriz (e') del ángulo determinado por $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{MN}$ con sus semiplanos respectivos (uno a la izquierda y otro a la derecha , pues la semejanza es indirecta), y por X se traza el eje (e) paralelo a (e'). El centro de la semejanza será la intersección del eje con la circunferencia . Obsérvese que dicho punto coincide con el punto Y, que a su vez, es punto medio de $\overline{AB}$ (pues $\frac{\overline{YM}}{\overline{YP}} = \frac{1}{2}$)



2) La semejanza queda determinada entonces como $\Sigma_{1/2} = H_{Y,1/2} \circ S_e$
Veamos las imágenes del cuadrado en la composición :

$$ABCD \xrightarrow{S_e} A_1B_1C_1D_1 \xrightarrow{H_{Y,1/2}} A'B'C'D'$$



Obsérvese que $A_1 = B$, $B_1 = A$, $C_1 = D$ y $D_1 = C$ y que A', B', C' y D', son puntos medios de $\overline{BY}$, $\overline{AY}$, $\overline{MR}$, y $\overline{MQ}$ respectivamente.

7. RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS

7.1 TEOREMA DEL CATETO

En todo triángulo rectángulo la longitud de cada cateto es media proporcional entre las longitudes de la hipotenusa y la de su proyección sobre la misma.

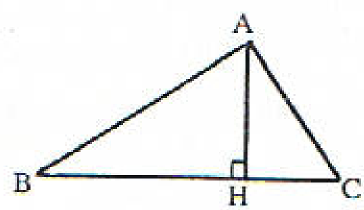
Hipótesis: $\widehat{BAC} = 90°$, H proyección de A sobre BC Tesis : $\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$

Demostración

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{HBA}$ son semejantes pues tienen dos ángulos congruentes: $\widehat{BAC} = \widehat{BHA}$ (recto) y $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$ (común). En consecuencia se cumple la proporcionalidad de sus lados,

por lo cual $\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$,

de donde se deduce que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$



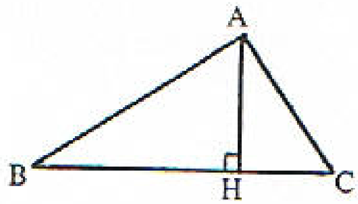
7.2 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar el teorema anterior para el otro cateto, o sea $\overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{CH}$
2) Demostrar los teoremas recíprocos. Sugerencia: utilizar primer criterio de semejanza de triángulos.

7.3 TEOREMA DE LA ALTURA

En todo triángulo rectángulo la longitud de la altura correspondiente al vértice del ángulo recto es media proporcional entre las longitudes de los segmentos en la que ésta divide a la hipotenusa.

Demuestre el lector en forma análoga al teorema anterior que $\overline{HA}^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$, utilizando para la demostración los triángulos semejantes $\overset{\triangle}{AHB}$ y $\overset{\triangle}{CHA}$.



7.4 TEOREMA DE PITAGORAS

Directo

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Hipótesis: $B\widehat{A}C = 1\widehat{R}$ Tesis: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

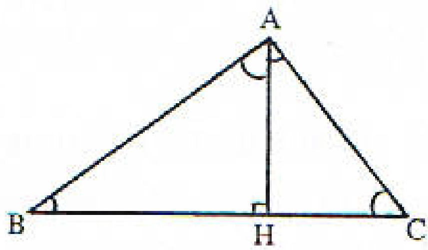
Demostración

Aplicando el teorema del cateto se puede afirmar que : $\overline{AB}^2 = \overline{BH}.\overline{BC}$

$\overline{AC}^2 = \overline{HC}.\overline{BC}$

y sumando : $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = (\overline{BH}+\overline{HC}).\overline{BC}$

y como $\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC}$, se cumplirá que $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.



Recíproco

Hipótesis: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ Tesis: $B\widehat{A}C = 1\widehat{R}$

Demostración

Por el teorema directo de Pitágoras, se puede afirmar que: $\overline{AB}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{BH}^2$

$\overline{AC}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{HC}^2$

y sumando miembro a miembro : $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{HA}^2 + (\overline{BH}^2 + \overline{HC}^2)$ *

Considerando que $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$, se cumplirá que $\overline{BC}^2 = (\overline{BH}+\overline{HC})^2$, lo que implica que $\overline{BH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\,\overline{BH}.\overline{HC}$. Si se sustituye esta última expresión y la hipótesis en la igualdad señalada con asterisco *, y se efectúan operaciones, se llega a la igualdad $\overline{HA}^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$, o sea que $\dfrac{HA}{BH} = \dfrac{HC}{HA}$. De esta última afirmación y considerando que $A\widehat{H}B = A\widehat{H}C$ (rectos), si se aplica el primer criterio de semejanza de triángulos se cumplirá que $\overset{\triangle}{AHB} \approx \overset{\triangle}{CHA}$.

Como los triángulos semejantes, tienen sus ángulos congruentes, se cumple que $H\widehat{A}B = H\widehat{C}A$. En el triángulo rectángulo $A\widehat{H}C$, los ángulos $H\widehat{A}C$ y $H\widehat{C}A$ son complementarios o sea que $H\widehat{A}C + H\widehat{C}A = 1R$ y como $H\widehat{A}C + H\widehat{A}B = B\widehat{A}C$, combinando estas últimas tres igualdades se concluye que $B\widehat{A}C = 1R$.

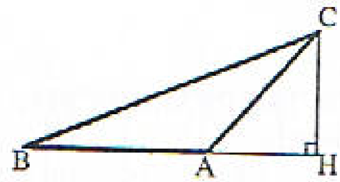
7.5 Generalización a triángulos no rectángulos

El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo, opuesto a un ángulo obtuso (agudo), es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados , más (menos) el doble producto de la longitud de uno de ellos ,por la longitud de la proyección del otro sobre él.

Hipótesis: 1- $B\widehat{A}C > 1R$
2- $B\widehat{A}C < 1R$

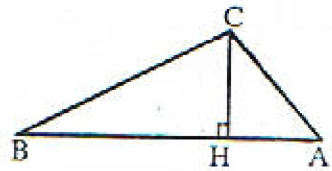
Tesis: 1- $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB}.\overline{AH}$
2- $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AH}$

Demostración



1- Aplicando el teorema directo de Pitágoras, en los triángulos $B\widehat{C}H$ y $A\widehat{C}H$, es posible afirmar que $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$ y que $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$. Si se resta miembro a miembro ambas igualdades y se efectúan operaciones se cumplirá que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2$. Considerando que $\overline{BH} = \overline{AB} + \overline{AH}$ y sustituyendo en la igualdad anterior, mediante operaciones se llega a que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB}.\overline{AH}$

Demuestre el lector, la tesis 2 en forma análoga.



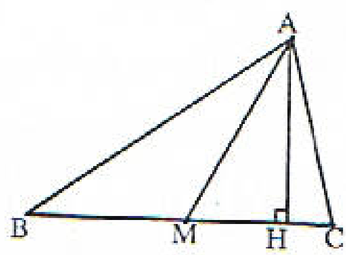
7.6 TEOREMA DE LA MEDIANA

El cuadrado de la longitud de la mediana de un triángulo es igual a la semisuma de los cuadrados de las longitudes de los lados que concurren al vértice de la mediana, menos la cuarta parte del cuadrado de la longitud del lado opuesto al vértice.

Hipótesis : $\overline{AM}$ mediana, $\overline{AH}$ altura

Tesis : $\overline{AM}^2 = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{2} - \dfrac{\overline{BC}^2}{4}$

Demostración



Si se aplica la generalización de Pitágoras en $A\widehat{M}B \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overline{BM}.\overline{MH}$ y en $AMC \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\,\overline{CM}.\overline{MH}$

Considerando que $\overline{BM} = \overline{CM}$ y sumando miembro a miembro se obtiene que

$$AB^2 + \overline{AC}^2 = 2AM^2 + 2MC^2$$

y como $\overline{MC} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$, sustituyendo y efectuando

operaciones se cumplirá que $\overline{AM}^2 = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{2} - \dfrac{\overline{BC}^2}{4}$

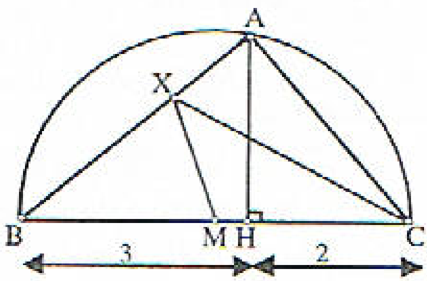
7.7 EJEMPLO

1) Dado un segmento de longitud x, construir un triángulo cualquiera $\widehat{ABC}$ rectángulo en A de altura $h_A = \sqrt{6}.x$ y calcular las longitudes de sus lados.

2) Sobre el lado $\overline{AB}$ se considera un punto X tal que AX = 1/3 AB. Calcular las longitudes de los lados del triángulo $\widehat{BCX}$.

3) Calcular la longitud de la mediana $\overline{MX}$ en dicho triángulo.

1) Aplicando el teorema de la altura se construye un segmento $\overline{BC}$ y en él un punto H tal que por ejemplo $\overline{BH} = 3x$ y $\overline{CH} = 2x$. A continuación se ubica el punto A, intersección de la perpendicular a BC por H con la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$. Se cumplirá entonces que $\overline{AH}^2 = 3x\,.2x$ y en consecuencia $\overline{AH} = \sqrt{6}\,x$. Para calcular las longitudes de los lados se aplica el teorema de Pitágoras en $\widehat{AHB}$: $\overline{AB}^2 = (3x)^2 + (\sqrt{6}\,x)^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{15}\,x$



y en el triángulo $\widehat{AHC}$: $\overline{AC}^2 = (2x)^2 + (\sqrt{6}\,x)^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{10}\,x$

2) Las longitudes de los lados son $\overline{BC} = 5x$ y $\overline{BX} = \frac{2}{3}\sqrt{15}\,x$ y $\overline{CX}$ puede calcularse

aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{ACX}$: $\overline{CX}^2 = (\frac{1}{3}\sqrt{15}\,x)^2 + (\sqrt{10}\,x)^2$

entonces $\overline{CX} = \dfrac{\sqrt{105}}{3}\,x$

3) Si se aplica el teorema de la mediana en el triángulo $\widehat{BCX}$, se cumplirá que:

$$\overline{MX}^2 = \frac{(\frac{2}{3}\sqrt{15}.x)^2 + (\frac{\sqrt{105}}{3}.x)^2}{2} - \frac{5^2}{4}.x^2 \quad \text{de donde} \quad \overline{MX} = \frac{\sqrt{105}}{6}.x$$

8. RELACIONES METRICAS EN CIRCUNFERENCIAS

8.1 Potencia de un punto respecto de una circunferencia

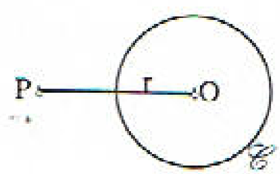
Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio r y un punto P del plano, se llama potencia de P respecto de $\mathscr{C}$, al número real $\overline{PO}^2 - r^2$

Notación: $\text{Pot.}_{\mathscr{C}}(P) = \overline{PO}^2 - r^2$

Si P pertenece a $\mathscr{C} \Rightarrow \overline{PO} = r \Rightarrow \text{Pot.}_{\mathscr{C}}(P) = 0$

Si P es exterior a $\mathscr{C} \Rightarrow \overline{PO} > r \Rightarrow \text{Pot.}_{\mathscr{C}}(P) > 0$

Si P es interior a $\mathscr{C} \Rightarrow \overline{PO} < r \Rightarrow \text{Pot.}_{\mathscr{C}}(P) < 0$

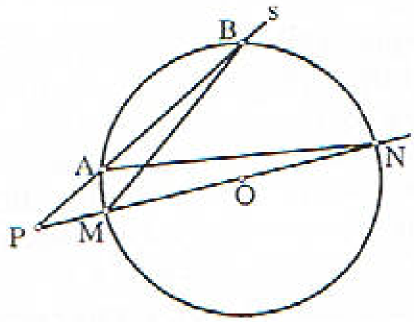


Propiedad

Si desde un punto P exterior a una circunferencia $\mathscr{C}$, se traza una recta (s), secante cualquiera se cumple que el producto de las distancias desde P a los puntos de intersección, es constante e igual a la potencia del punto respecto de la circunferencia.

Hipótesis : $s \cap \mathscr{C} = \{A,B\}$, $P \in s$, P exterior a $\mathscr{C}$ Tesis: $Pot._{\mathscr{C}}(P) = \overline{PA}\,.\overline{PB}$

Demostración



Sean $\{M,N\} = \mathscr{C} \cap PO$

Los triángulos $\widehat{PMB}$ y $\widehat{PAN}$ son semejantes pues tienen dos ángulos congruentes : $\widehat{MPB} = \widehat{APN}$ (ángulo común), y $\widehat{MBA} = \widehat{ANP}$ (inscriptos en $\mathscr{C}$ en una mismo arco AM), por lo tanto los lados correspondientes serán proporcionales, o sea que

$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{PA}}$, de donde se deduce que

$\overline{PA}\,.\overline{PB} = \overline{PM}\,.\overline{PN}$,

y como $\overline{PM} = \overline{PO} - r$ y $\overline{PN} = \overline{PO} - r$

se cumplirá que

$\overline{PA}\,.\overline{PB} = (\overline{PO} - r)(\overline{PO} + r) \Rightarrow \overline{PA}\,.\overline{PB} = \overline{PO}^2 - r^2 \Rightarrow \overline{PA}\,.\overline{PB} = Pot._{\mathscr{C}}(P)$

8.2 EJERCICIOS TEORICOS

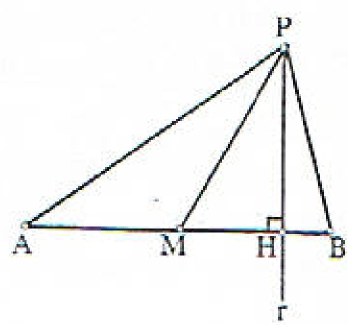
1) Demostrar que si desde un punto P exterior a una circunferencia, se traza una tangente a ella, siendo T el punto de tangencia, entonces se cumple que $Pot._{\mathscr{C}}(P) = \overline{PT}^{\,2}$

2) Demostrar que si desde un punto P interior a una circunferencia se traza una recta (s) secante que la corta en A y B, se cumple que $Pot._{\mathscr{C}}(P) = -\,(\overline{PA}\,.\overline{PB})$

8.3 Lugar geométrico referido a diferencia de cuadrados de distancias constante, a dos puntos dados.

El lugar geométrico de los puntos P del plano, cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos A y B es constante, o sea $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = k$, es una recta (r), perpendicular a la recta que determinan los puntos fijos, y que pasa por un punto H de ella, situado a una distancia del punto medio M de $\overleftrightarrow{AB}$ igual a $\overline{MH} = \dfrac{k}{2\overline{AB}}$

Demostración



En primer lugar se demostrará que todo punto que pertenece a la recta (r), cumple con la propiedad, es decir que si $P \in r \Rightarrow \left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = k$

Se aplicará la generalización de Pitágoras en los siguientes triángulos :

en $\widehat{AMP}$ $\Longrightarrow$ $\overline{PA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 + 2\,\overline{AM}.\,\overline{MH}$

en BMP $\Longrightarrow$ $\overline{PB}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MP}^2 - 2\,\overline{MB}.\,\overline{MH}$

Restando miembro a miembro y considerando que $\overline{AM} = \overline{MB}$ y que $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$ se cumple que $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = 2.\overline{AB}.\overline{MH}$, y como la recta (r) por hipótesis esta si'''ad , a una distancia $\overline{MH} = \dfrac{k}{2\overline{AB}}$, sustituyendo en la última igualdad, se concluye que $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = k$

Demostraremos a continuación que si $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = k \Rightarrow P \in r$

Sea (r_o) la perpendicular a la recta AB por P, y H_0 su intersección con ella. Razonan'' en forma análoga al teorema directo es posible afirmar que $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = 2.\overline{AB}.\overline{MH}_0$

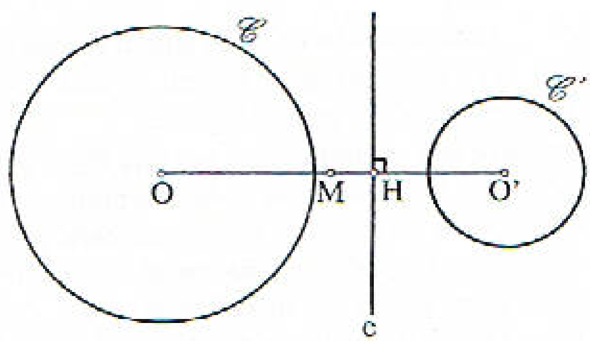
Como por hipótesis $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = k$, se cumple entonces que $\overline{MH}_0 = \dfrac{k}{2.\overline{AB}}$.También cumple que $\overline{MH} = \dfrac{k}{2.\overline{AB}}$, por lo que el punto H debe coincidir con H_0, ya que por axioma métrico, es único el punto que dista una medida $\dfrac{k}{2.\overline{AB}}$ del punto M.

Además como la perpendicular por H a la recta AB es única, se concluye que las rectas (r) y (r_o) deben coincidir y en consecuencia $P \in r$

8.4 EJE RADICAL

El lugar geométrico de los puntos del plano, que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias $\mathscr{C}_{O,r}$ y $\mathscr{C}_{O',r'}$,(no concéntricas), es una recta perpendicular a la recta de los centros OO', y que pasa por un punto H perteneciente a ésta, tal que su distancia al punto medio del segmento $\overline{OO'}$ es igual a $\dfrac{\left|r^2 - r'^2\right|}{2\overline{OO'}}$, llamada eje radical.

Obsérvese que los puntos P que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias, cumplirán que la diferencia de cuadrados a dos puntos fijos del plano es constante, pues por definición:
$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$ entonces
$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = r^2 - r'^2$
Si se toma $k = \left|r^2 - r'^2\right|$



, el eje radical se reduce al lugar geométrico demostrado anteriormente, tal que $\overline{MH} = \dfrac{\left|r^2 - r'^2\right|}{2.\overline{OO'}}$

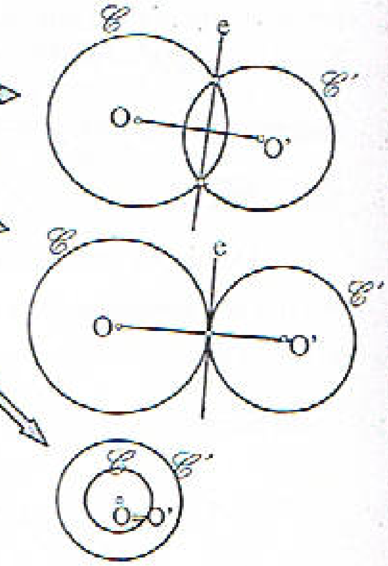
8.5 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que si dos circunferencias son secantes, el eje radical es la recta que contiene a los puntos de intersección.

2) Demostrar que si dos circunferencias son tangentes, el eje radical es la recta tangente común a ambas.

3) Demostrar que si las circunferencias son concéntricas y de distinto radio, no existe el eje radical.

4) Demostrar que si las circunferencias son de igual centro y radio, cualquier punto del plano verifica la condición del lugar.



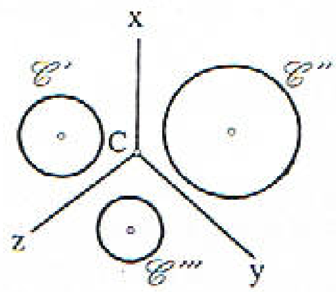
8.6 CENTRO RADICAL

Dadas tres circunferencias, cuyos centros no se hallen alineados, existe un punto único del plano, que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias, llamado centro radical.

Sean : (x) eje radical de $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$

(y) eje radical de $\mathscr{C}''$ y $\mathscr{C}'''$

(z) eje radical de $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}'''$



Como los centros no están alineados, existe un punto C tal que $\{C\} = x \cap y$.

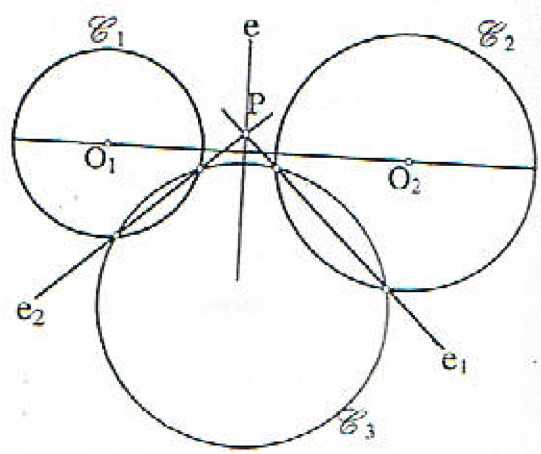
Como $C \in x$, entonces : $Pot._{\mathscr{C}'}(C) = Pot._{\mathscr{C}''}(C)$

Como $C \in y$, entonces : $Pot._{\mathscr{C}''}(C) = Pot._{\mathscr{C}'''}(C)$

Aplicando la propiedad transitiva se cumplirá en consecuencia que: $Pot._{\mathscr{C}'}(C) = Pot._{\mathscr{C}'''}(C)$, de donde el punto C por definición debe pertenecer al eje (z), por lo que $\{C\} = x \cap y \cap z$

8.7 Construcción del eje radical de dos circunferencias exteriores o interiores.

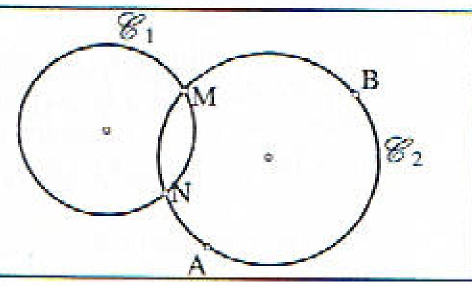
Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ y (e) su eje radical, el cual se quiere hallar. En primer lugar se construye una circunferencia auxiliar $\mathscr{C}_3$ que corte a las dadas. Los puntos de corte con cada una de ellas determinan los ejes radicales (e_1) y (e_2), que a su vez se cortan en un punto P. Como P es el centro radical de las tres circunferencias, dicho punto pertenecerá al eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Para hallar el eje (e), basta trazar por P la perpendicular a la recta de los centros O_1O_2



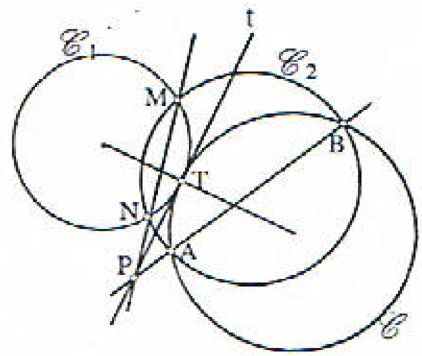
8.8 EJEMPLO

Se consideran dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ secantes en M y N, y en $\mathscr{C}_2$, otros dos puntos A y B.

Construir una circunferencia $\mathscr{C}$ que pase por A y B y sea tangente a $\mathscr{C}_1$.



En primer lugar se construye una figura de análisis como si el problema se encontrara resuelto, por lo que a partir de una circunferencia $\mathscr{C}$ cualquiera, se traza una circunferencia $\mathscr{C}_1$ tangente a ella y otra $\mathscr{C}_2$ secante con ambas. Obsérvese que el eje radical de las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es la recta MN y que el eje radical de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_2$ es la recta AB. La intersección de ambos ejes es el centro radical de las tres circunferencias, al que llamaremos P.



Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes, el eje radical entre ambas será la recta tangente común (t) que pasa por P.

Una vez hallada la tangente (t), se construye el punto de tangencia T, y la circunferencia solución, será la determinada por los puntos A,B y T

<u>Construcción</u>

- Se halla el centro radical P tal que $\{P\} = AB \cap MN$
- Por P se traza la tangente (t) a $\mathscr{C}_1$
- Se determina el punto $\{T\} = t \cap \mathscr{C}_1$
- Se construye la circunferencia $\mathscr{C}$, determinada por los puntos A,B y T:

8.9 Segmento o sección áurea

Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto X interior, decimos que $\overline{AX}$ es el segmento áureo del segmento $\overline{AB}$, si $\overline{AX} > \overline{BX}$ y además $\overline{AX}$ es media proporcional entre la medida del segmento $\overline{AB}$ y la medida del segmento menor $\overline{BX}$, o sea que se cumplirá que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ lo que implica que $\overline{AX}^2 = \overline{AB}.\overline{BX}$

Para su construcción ver ejercicios 20 y 21 de este capítulo.

9. EJERCICIOS

1) En un triángulo $\widehat{ABC}$, rectángulo en A se traza la perpendicular a BC por A que la corta en D, y la perpendicular a AB por D que la corta en E.
Demostrar que el triángulo $\widehat{AED}$ es semejante con los siguientes triángulos :
a) $\widehat{CDA}$ b) $\widehat{DEB}$ c) $\widehat{ABC}$

2) Se da un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en una circunferencia $\mathscr{C}$. La bisectriz. del ángulo $\widehat{A}$ corta a $\overline{BC}$ en D y a $\mathscr{C}$ en M.
a) Probar que $\widehat{DMC} \approx \widehat{DAB}$
b) Probar que $\overline{MC}^2 = \overline{MD}.\overline{MA}$.

Se dan dos cfas. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ secantes en A y B. Por A se trazan dos rectas que cortan a $\mathscr{C}$ en M y N y a $\mathscr{C}_1$ en M_1 y N_1.
Probar que $\widehat{BMM_1} \approx \widehat{BNN_1}$.

4) Sean tres puntos alineados A,B y C. Se consideran las semicircunferencias $\mathscr{C}_1$ de diámetro $\overline{AB}$ y $\mathscr{C}_2$ de diámetro $\overline{AC}$ ubicadas en semiplanos opuestos. Por I, $I \in AB$, se traza la perpendicular a AB que corta a $\mathscr{C}_1$ en M y a $\mathscr{C}_2$ en N, y sea $MB \cap NC = \{P\}$.
a) Probar que el cuadrilátero MANP es inscriptible.
b) Probar que $\widehat{APB} \approx \widehat{APC}$.
c) Probar que $\overline{AP}^2 = \overline{AB}.\overline{AC}$.

5) Sean dos paralelas (b) y (c). Se construye un triángulo $\widehat{ABC}$ con $B \in b$, $C \in c$, $BC \perp b$. Sea H el ortocentro , $BH \cap c = \{N\}$ y $CH \cap b = \{M\}$
a) Probar que $\widehat{HCN} \approx \widehat{HMB}$.
b) Probar que $\widehat{HMB} \approx \widehat{ABC}$.

6) Sea (ABCD) un trapecio inscripto en una cfa. $\mathscr{C}$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Sea $P \in \mathscr{C}$ en distinto semiplano que A respecto de DC, y $AB \cap PC = \{E\}$
Probar que $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PD}.\overline{PE}$.

7) Se da una recta (r) y un punto exterior A fijos. Sobre (r) varía un punto B. Se construyen los triángulos equiláteros $\widehat{ABC}$ horarios.
a) Lugar geométrico del punto medio de $\overline{BC}$.
b) Lugar geométrico del baricentro del $\widehat{ABC}$.

8) Se consideran una recta fija (e) y en ella un punto A fijo y una cfa. $\mathscr{C}$ exterior. Sobre $\mathscr{C}$ varia un punto B.
Se construyen los triángulos $\widehat{ABG}$, isósceles, con $\overline{AB} = \overline{AG}$, A y G en distinto semiplano respecto de (e) y tal que (e) es mediatriz de $\overline{BG}$
Se construyen los triángulos $\widehat{ABC}$ de modo que G sea baricentro de ellos.
Lugar geométrico de M punto medio de $\overline{BC}$.

9) Se dan dos rectas paralelas (a) y (b) y un punto P exterior fijo tal que d (P,a)=3 y d (P,b)=6. Una recta variable (r) por P corta a (a) y (b) en A y B. Se construyen los cuadrados ABCD horarios.
a) Probar que los triángulos $\widehat{PAD}$ se mantienen semejantes.
b) Probar que $\widehat{APD}=45°$.
c) Probar que $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\sqrt{2}$.
d) Lugar geométrico de D.

10) Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ antihorario rectángulo en C tal que $\overleftrightarrow{CH}$ es altura y $\overline{BH}=x$ $\overline{BC}=2x$
a) Demostrar que $\frac{\overline{HC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) Aplicando el teorema de la altura calcular $\overline{HA}$ y construir el triángulo para x=2.

11) Sea un ángulo recto $\widehat{aOb}$. Se construye un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en C en las condiciones del ejercicio 10 con $A\in a$ y $B\in b$.
a) Probar que los cuadriláteros OACB son inscriptibles.
b) Probar que los triángulos $\widehat{ABC}$ permanecen semejantes a si mismos al variar A y B en (a) y (b) y mantenerse C fijo.
c) Lugar geométrico de H.

12) Se considera un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en A y de altura AH con $\overline{BH}=x$ y $\overline{HC}=y$. Calcular la altura, la medida de los catetos, el perímetro y el área en función de x e y.

13) Construir un triángulo $\widehat{RST}$ rectángulo en R de altura $\overleftrightarrow{RH}$, sabiendo que $\overline{RH}=\sqrt{15}$, sin deducir la medida de los catetos ni de los ángulos.
Sugerencia: Aplique teorema de la altura.

14) Sea ABCD un cuadrado de centro O y sentido antihorario, M,N,P,Q y X puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ y $\overline{OA}$ respectivamente.
a) Hallar centro, ángulo y razón de la semejanza directa que transforma $\overrightarrow{AX}$ en $\overrightarrow{NP}$.
b) Hallar la preimagen del triángulo $\widehat{QOA}$ en la semejanza anterior.

15) Se considera un triángulo equilátero $\widehat{AA'C}$ antihorario y sean $B\in \overline{AC}$ y $B'\in \overline{A'C}$ tal que $\overline{AB}=\overline{B'C}=\frac{1}{3}\overline{AC}$.
a) Hallar centro O y eje de la semejanza indirecta (e) que transforma $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$.
b) Hallar la imagen M' del punto medio M de $\overline{AA'}$ en dicha semejanza
c) Deducir naturaleza del $\widehat{OM'B}$.

16) Se considera un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en B, horario, con $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=6$. Sobre la semirrecta opuesta a $\overline{CB}$ se toma D tal que $\overline{CD}=\overline{CA}$.
a) Hallar centro, razón y ángulo de la rotohomotecia que transforma $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$.
b) Sea M el circuncentro del $\widehat{ABC}$. Sea N el transformado de M en la rotohomotecia anterior. Verifique que $\widehat{CDN}$ es equilátero y justifique.

17) Se considera una cfa. $\mathscr{C}_1$, un punto T_1 de ella y la tangente (t_1) en T_1. Se construye otra cfa, $\mathscr{C}_2$ secante con $\mathscr{C}_1$ en M y N.
Construir una circunferencia. $\mathscr{C}$ tangente a (t_1) en T_1 y tangente a $\mathscr{C}_2$.

18) Se considera una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y un punto P exterior $PO\cap\mathscr{C}=\{A,B\}$.
a) Hallar un punto T de la cfa. tal que $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PA}.\overline{PB}}$.
b) Construir dos segmentos, conociendo el producto de sus medidas igual a 5 y su diferencia igual a $\dfrac{11}{6}$.

19) Se dan dos circunferencias exteriores $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ no congruentes y se construye su eje radical. Sobre $\mathscr{C}_1$ se considera un punto T_1.
Construir una circunferencia $\mathscr{C}$ tangente a $\mathscr{C}_2$ y tangente a $\mathscr{C}_1$ en T_1.

20) Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en B y $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Sobre $\overline{AC}$ se considera el punto Y, tal que $\overline{YC}=\overline{BC}$ y sobre $\overline{AB}$ el punto X tal que $\overline{AX}=\overline{AY}$.
a) Hallar $\overline{AX}$ en función de $\overline{AB}$.
b) Demuestre que $\overline{AX}$ es el segmento áureo de $\overline{AB}$.
c) Construir el segmento áureo de un segmento $\overline{DT}$ de medida 7.

21) Se considera un triángulo $\widehat{ABO}$ rectángulo en B con $\overline{AB}=2\overline{BO}$. Se traza la cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y radio $\overline{OB}$. Sea el punto $X\in\overline{AO}$ tal que $\overline{AX}=\overline{AB}$ y $AO\cap\mathscr{C}=\{M,N\}$ $(\overline{AM}>\overline{AN})$.
a) Probar que $\overline{AM}.\overline{AN}=\overline{AB}^2$.
b) Probar que $\overline{AX}$ es el segmento áureo de $\overline{AM}$.
c) Construir un segmento sabiendo que su segmento áureo mide 3.

22) Se da una cfa. $\mathscr{C}$ de centro O y radio 3 y otra cfa. $\mathscr{C}_1$ de centro O_1 y radio 2, tal que $\overline{OO_1}=4$, $\mathscr{C}\cap\mathscr{C}_1=\{A,B\}$, $AB\cap OO_1=\{H\}$ y $\overline{OO_1}\cap\mathscr{C}=\{M\}$.
a) Calcular $\overline{BM}$ usando el teorema de la mediana.
b) Calcular $\overline{HM}$, $\overline{O_1H}$ y $\overline{AB}$.

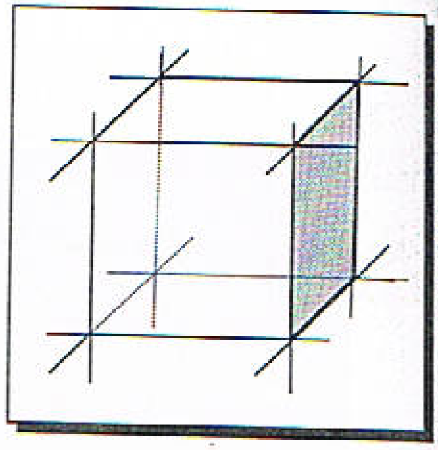
GEOMETRIA

DEL

ESPACIO

CAPITULO 13

INCIDENCIAS Y ORDEN EN EL ESPACIO



1. INTRODUCCIÓN

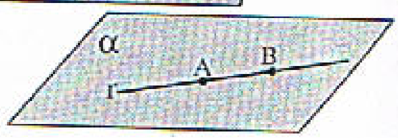
A continuación se ampliará el estudio de la geometría métrica plana hacia el espacio, siendo válidas todas las conclusiones extraídas en la primer parte del curso, a nivel de cada plano. Seguidamente se ampliará el sistema axiomático

2. AXIOMA DE DETERMINACION DEL PLANO

Dados tres puntos no alineados, existe y es único el plano al cual pertenecen.

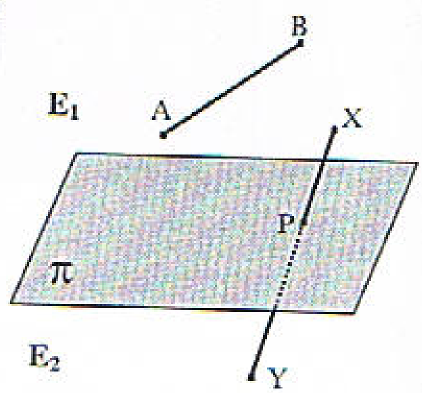
3. AXIOMA DE INCLUSION DE UNA RECTA EN UN PLANO

Si dos puntos de una recta, pertenecen a un plano, entonces la recta esta incluida en el plano.



4. AXIOMA DE PARTICION DEL ESPACIO

Para todo plano π del espacio **E**, existen dos únicos conjuntos E_1 y E_2 , que cumplen las siguientes condiciones :



1) $\{ E_1, E_2, \pi \}$ es una partición del espacio, o sea que verifican i) $E_1 \neq \emptyset$ y $E_2 \neq \emptyset$

ii) $E_1 \cup E_2 \cup \pi = \mathbf{E}$

iii) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cap \pi = \emptyset$, $E_2 \cap \pi = \emptyset$

2) el segmento determinado por dos puntos de E_1, o por dos puntos de E_2 no tiene puntos en común con π.

3) el segmento determinado por un punto de E_1 y un punto de E_2, tiene un único punto en común con π

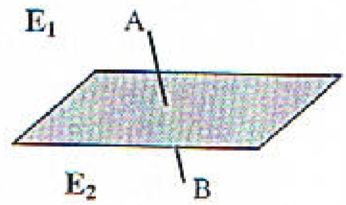
Observación

- Los conjuntos $\pi \cup E_1$ y $\pi \cup E_2$ reciben el nombre de semiespacios opuestos de borde π.

5. RECIPROCO DEL AXIOMA (4.3)

Dado un segmento $\overline{AB}$, si uno y sólo uno de sus puntos interiores (P) pertenece a π, entonces un extremo pertenece a E_1 y el otro a E_2.

Demostración



Se demostrará el contrarrecíproco, por lo que si A y B no pertenecieran a distintas regiones (E_1 , E_2), habrían sólo dos opciones:

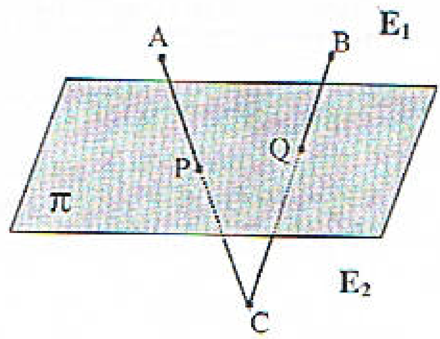
1) que al menos uno de los extremos pertenezca a π lo que contradice la hipótesis, pues por axioma.3 , el segmento estaría incluido en π.

2) que ambos extremos pertenezcan a E_1 o E_2, por lo que por axioma 4.2 se cumple que $AB \cap \pi = \varnothing$, lo que también contradice la hipótesis.

6. EJERCICIO TEORICO

Demostrar el recíproco del axioma 4.2. Sugerencia demostrar por absurdo.

7. TEOREMA DE PASCH EN EL ESPACIO



Dado un plano π ,y tres puntos A,B, y C no pertenecientes a él, se cumple que si el plano corta a uno de los tres segmentos que éstos determinan, (por ejemplo $\overline{AC}$), entonces corta a otro ($\overline{BC}$) pero no al tercero ($\overline{AB}$).

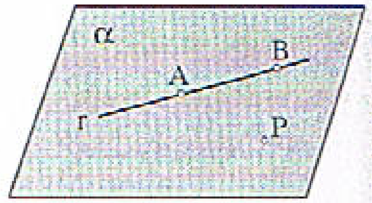
Demostración

Sean E_1 y E_2 las regiones determinadas por π y $\{P\} = \overline{AC} \cap \pi$,de donde, A y C pertenecen a regiones distintas. Como $B \notin \pi$, debe pertenecer a E_1 o E_2, supongamos que pertenece a E_1 al igual que A, por lo cual, es posible afirmar que $\overline{AB} \subset E_1$,y como $E_1 \cap \pi = \varnothing$, entonces $\overline{AB} \cap \pi = \varnothing$ .Así mismo, aplicando nuevamente el axioma de partición , como A y C pertenecen a regiones distintas, se cumplirá que existe un punto $\{ Q \} = \overline{BC} \cap \pi$.

8. DETERMINACION DE PLANOS

8.1 Plano determinado por una recta y punto exterior

Dados una recta (r) y un punto exterior P, existe y es único el plano α que los contiene.



Demostración

Existencia

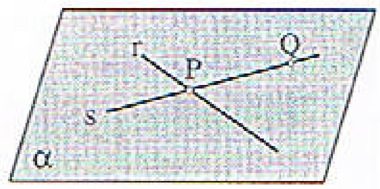
Sean A y B, dos puntos distintos de la recta (r). Como $P \notin r$; A,B y P no están alineados, de donde, por axioma, determinan un plano α que los contiene. Además si los puntos A y B pertenecen a α, la recta (r) que los contiene está incluida en él.

Unicidad

Todo plano β que contenga a (r) y a P, contiene también a todos los puntos de (r), inclusive a B y A. Como por axioma, existe y es único el plano que determinan A,B y P, entonces $\alpha = \beta$.

8.2 Plano determinado por dos rectas secantes

Dadas dos rectas secantes (r) y (s), existe y es único el plano α que las incluye.



Demostración

Existencia

Sean $\{P\} = r \cap s$, y Q un punto distinto de P perteneciente a (s). Como $Q \notin r$, pues $r \neq s$, se puede aplicar el teorema anterior, en que la recta (r) y el punto Q determinan un plano α, en el cual, están incluidos.
Además como $r \subset \alpha$ y $P \in r$, entonces $P \in \alpha$.
P y Q determinan la recta (s), que deberá estar incluida en α al estarlo P y Q, por lo que, existe el plano α que incluye a ambas rectas.

Unicidad

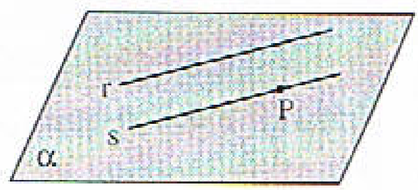
Todo plano β que incluya a (r) y (s), contiene también a Q.
Entonces $Q \in \beta$ y $r \subset \beta$, de donde, aplicando el teorema anterior, en el cual una recta y un punto exterior determinan un único plano, se concluye que $\alpha = \beta$.

8.3 Plano determinado por dos rectas paralelas

Dos rectas paralelas disjuntas, determinan un plano que las contiene.

Demostración

Existencia



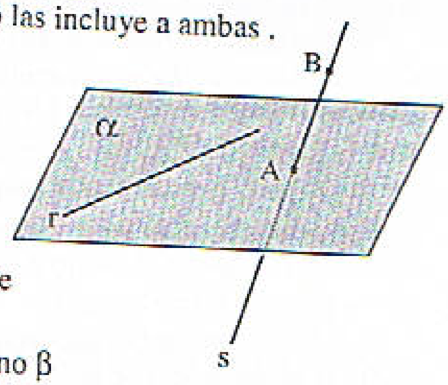
Si dos rectas (r) y (s) son paralelas , por definición deben ser coplanarias, por lo que existe el plano α que las incluye.

Unicidad

Todo plano β que incluya a (r) y (s), incluirá un punto P∈ s, y en consecuencia, exterior a (r); y como ya se demostró anteriormente , un punto y una recta exterior determinan un único plano, o sea que $\alpha = \beta$.

9. EXISTENCIA DE RECTAS NO COPLANARIAS

Existen pares de rectas tales que ningún plano las incluye a ambas .



Demostración

Sean una recta (r) ,un punto A exterior, y el plano α que determinan. Se considera un punto B del espacio, exterior a α, y sea (s) la recta determinada por A y B.

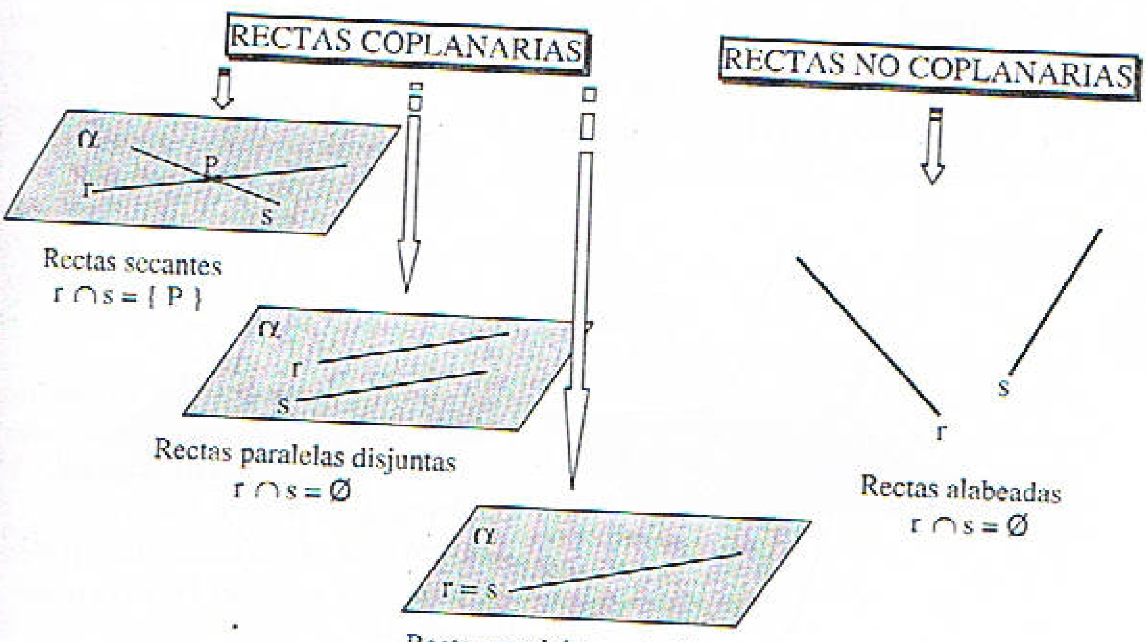
Con estas hipótesis se probará que no existe ningún plano β, que incluya a (r) y (s).

Supongamos por absurdo que existe un plano β que incluye a ambas rectas. Como (s) está incluida en β y $A \in s$, entonces $A \in \beta$. La recta (r) y el punto A, determinan un único plano, por lo que, $\alpha = \beta$
Como $B \in s$ y $s \subset \beta$, se cumplirá que $B \in \beta$, o sea que $B \in \alpha$, en contradicción con la hipótesis inicial, de que B es exterior a α, por lo cual, resulta absurdo suponer que exista un plano que contenga a ambas rectas.

Observación

Las rectas no coplanarias se denominan rectas alabeadas o rectas que se cruzan, por lo que, si dos rectas se cruzan, no se cortan.

10. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO



Rectas secantes
$r \cap s = \{ P \}$

Rectas paralelas disjuntas
$r \cap s = \emptyset$

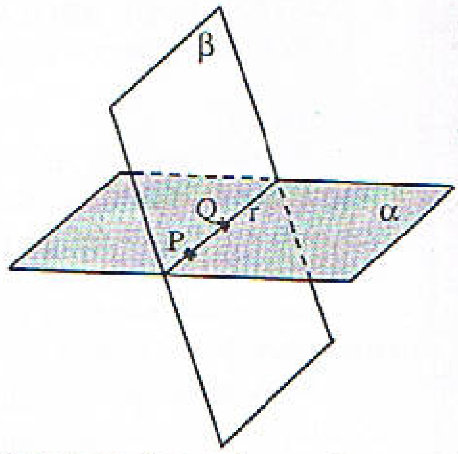
Rectas paralelas coincidentes
$r = s$

Rectas alabeadas
$r \cap s = \emptyset$

11. INTERSECCION DE PLANOS

11.1 Intersección determinada por dos puntos comunes

Si dos planos distintos α y β, tienen dos puntos comunes P y Q, su intersección es la recta (r) , que estos puntos determinan.



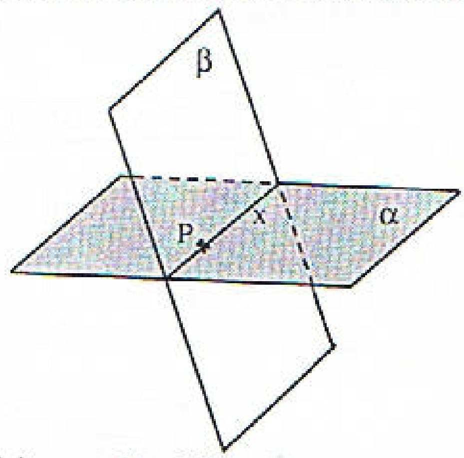
Demostración

Si P y Q pertenecen a α, la recta que ellos determinan, también se encuentra incluida en el plano (axioma de inclusión).Se razona igual para el plano β, de donde $r \subset \alpha \cap \beta$.
Se ha probado que la recta (r) esta incluida en el conjunto intersección de α y β, se demostrará a continuación que todo punto de la intersección de los planos pertenece a (r).

Supongamos por absurdo que existe un punto A perteneciente e la intersección de los planos y no perteneciente a (r) . Como A y (r) determinan un único plano, y $A \in \alpha$ y $A \in \beta$, entonces $\alpha = \beta$, en contradicción de la hipótesis de que dichos planos son distintos. Por lo que, resulta absurdo suponer que existan puntos de la intersección, que no pertenezcan a (r). Se concluye que $\alpha \cap \beta = r$

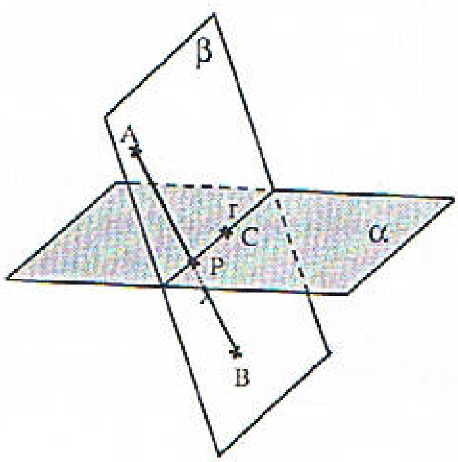
11.2 Intersección determinada por un punto en común

Si dos planos distintos α y β tienen un punto en común P, su intersección es una recta (r), a la cual pertenece el punto.



Demostración

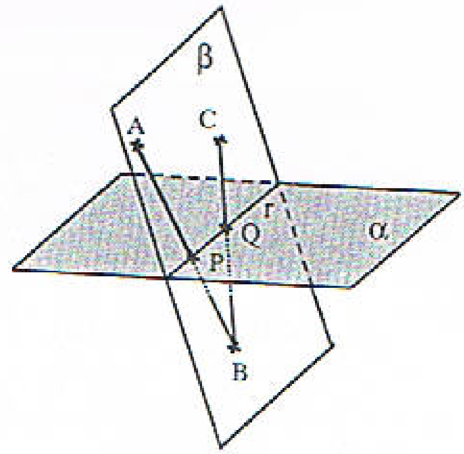
Por el punto P se considera una recta (x), incluida en β. Si (x) también esta incluida en α, entonces es la recta solución , (x = r).



Si (x) no está incluida en α, existen dos puntos A y B en (x), pertenecientes uno a cada semirrecta opuesta de origen P. Obsérvese que $A \notin \alpha$ y $B \notin \alpha$.
Sea otro punto C perteneciente a β y exterior a (x). Si $C \in \alpha$, entonces PC es la recta buscada (r).

Si $C \notin \alpha$, entonces C debe pertenecer a alguno de los semiespacios de borde α, supongamos que A y C están en el mismo semiespacio., por lo que, $AC \cap \alpha = \emptyset$.

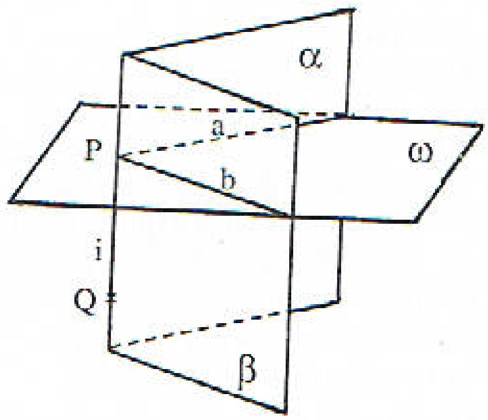
Si se aplica el teorema de Pasch en el espacio, como $\overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$, entonces α corta al segmento $\overline{BC}$ en un punto Q.
Dicho punto Q pertenece a ambos planos, por lo que PQ es la recta buscada (r).

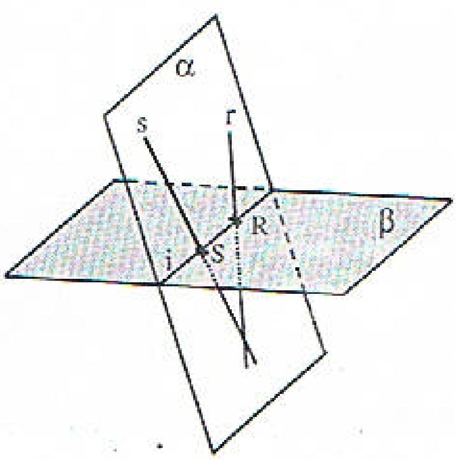


11.3 METODOS PRACTICOS PARA HALLAR LA INTERSECCION ENTRE DOS PLANOS

Método 1

Sean dos planos α y β cuya intersección (i) se quiere hallar.
Se considera un plano ω cuya intersección con α y β sea fácil de determinar.
A continuación se hallan las intersecciones $\omega \cap \alpha = a$ y $\omega \cap \beta = b$, y donde estas rectas se cortan, se encuentra un punto P de la recta intersección (i). De ser necesario, puede repetirse el procedimiento para hallar otro punto Q de la recta (i).



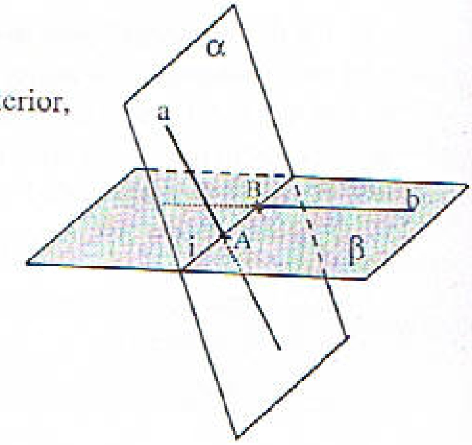


Método 2

Otro método consiste en hallar los puntos de intersección (R y S en la figura), de dos rectas contenidas (r y s), en uno de los planos, con el restante plano.
Los puntos R y S determinan la recta (i), intersección de α y β.

También puede emplearse el método anterior, considerando una recta incluida en cada plano

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha,\ a \cap \beta = \{A\} \\ b \subset \beta,\ b \cap \alpha = \{B\} \end{array}\right\} AB = i$$

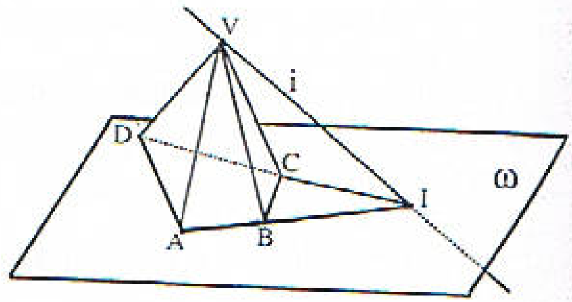


11.4 EJEMPLO

Se considera la pirámide de la figura, de base el cuadrilátero ABCD, de lados no paralelos, y vértice V. Sean los planos $\alpha = (V,A,B)$ y $\beta = (V,C,D)$.

Hallar la intersección de ambos planos.

Sea $i = \alpha \cap \beta$, la recta solución.
El punto V debe pertenecer a la recta (i), pues esta incluido en α y en β.
Se determinará otro punto I, de la intersección, siguiendo el método 1.
Para ello se considera el plano auxiliar ω, que contiene a la base de la pirámide, y se determinan sus intersecciones con α y β; o sea ,

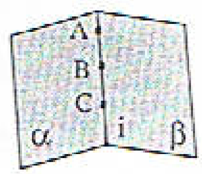


$\omega \cap \alpha = AB$ y $\omega \cap \beta = CD$.
Donde estas dos rectas se cortan, se encuentra un punto I de la recta intersección .
Se concluye entonces que la recta buscada es $i = VI$

11.5 Puntos alineados

Para justificar que tres o más puntos están alineados, es frecuente demostrar que dichos puntos pertenecen a la recta intersección de dos planos secantes.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = i \\ A,B,C \in i \end{array}\right\} \quad A,B,C \text{ alineados}$$

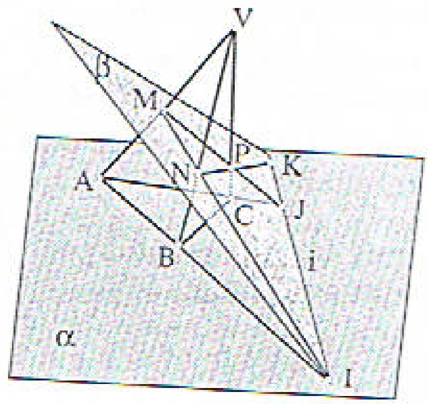


Se verá a continuación un ejemplo práctico de esta afirmación.

11.6 EJEMPLO

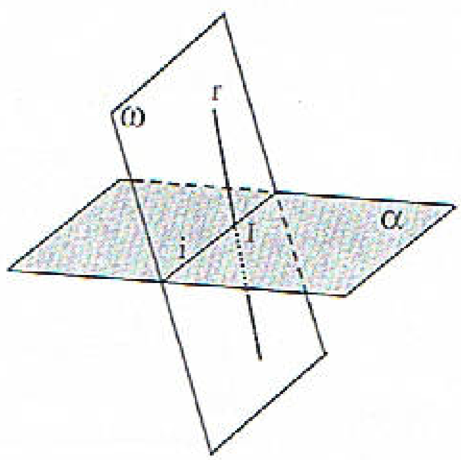
Se considera una pirámide de base triangular ABC y vértice V. Sobre las aristas laterales $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ y $\overline{VC}$, se consideran los puntos M, N y P. Las rectas MN, MP y NP, cortan al plano de la base α, en tres puntos I, J y K.
Probar que dichos puntos están alineados

Sea β el plano determinado por M, N y P. Las rectas MN, MP y NP están incluidas en β , por lo tanto,los puntos I, J y K , pertenecientes a estas rectas, se encuentran también incluidos en β.
Se deduce entonces que I, J y K pertenecen a la recta intersección (i), de α con β, por lo cual, se encuentran alineados.



12. INTERSECCION ENTRE RECTAS Y PLANOS

Dadas una recta (r) y un plano secante α, se explicará un procedimiento práctico, para hallar su punto de intersección I



El método consiste en considerar un plano auxiliar ω, que contenga a la recta (r), y cuya intersección (i) con el plano α resulte posible hallar. Luego, en donde la recta (i) corta a la recta (r), se encontrará el punto I buscado.

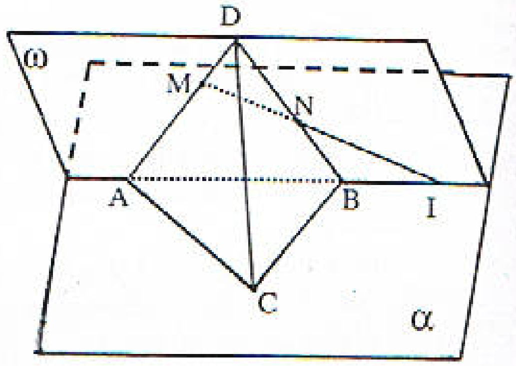
12.1 EJEMPLO

Se consideran cuatro puntos A,B,C y D, no coplanarios. Sean M y N dos puntos tales que M pertenece al segmento $\overline{AD}$, N al $\overline{BD}$ y la recta MN no es paralela a AB. Sea α, el plano determinado por los puntos A,B y C.

Hallar la intersección I de la recta MN, con el plano α.

Aplicando el método explicado anteriormente, se considera el plano auxiliar ω, determinado por la recta MN y por el punto D . La intersección de ω con α, es la recta AB.

En consecuencia en donde la recta AB corta a la recta MN, se encuentra el punto intersección buscado I.



12.2 EJEMPLO

Sea ABCDEF un prisma recto de bases triangulares ABE y DCF. Se consideran los puntos M y N pertenecientes a los segmentos $\overline{FD}$ y $\overline{FC}$ respectivamente.
Sea α el plano en el cual se hallan los puntos A,B,C y D; y β el plano determinado por M, N y E.

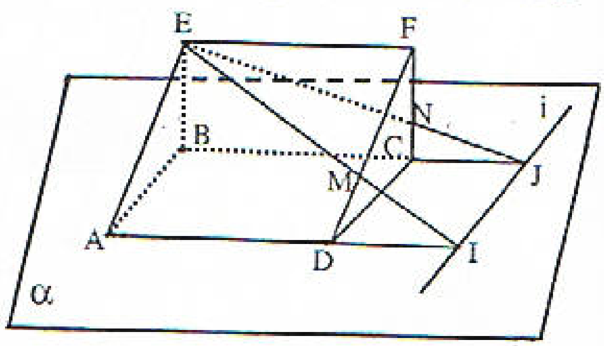
a) Hallar las intersecciones I y J del plano α, con las rectas EM y EN respectivamente.

b) Hallar la intersección (i) , de los planos α y β

a) Para hallar el punto I, siguiendo el procedimiento explicado, se considera el plano auxiliar de la cara ADEF, que contiene a la recta EM.

Dicho plano corta a α según la recta AD, luego el punto buscado será $\{I\} = AD \cap EM$.
Se razona en forma análoga para el punto J.

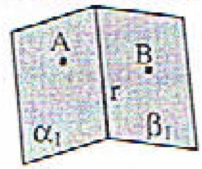
b) Para hallar la intersección de α y β, se aplica el método 2, de intersección entre planos. Como las rectas EM y EN están incluidas en β, y



$EM \cap \alpha = \{I\}$ y $EN \cap \alpha = \{J\}$, la recta solución será entonces $i = IJ$

13. DIEDRO CONVEXO

Dados dos semiplanos α_1 y β_1, de borde común (r), no opuestos ni coincidentes, se llama diedro convexo $\widehat{\alpha_1,\beta_1}$ al conjunto intersección de los semiespacios de borde α_1 y β_1 y que contienen respectivamente a los semiplanos β_1 y α_1.

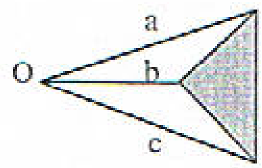


Si por ejemplo $A \in \alpha_1$ y $B \in \beta_1$, el diedro puede quedar definido como $\widehat{\alpha_1,\beta_1} = (\alpha_1, B) \cap (\beta_1, A)$.*
La recta (r) recibe el nombre de **arista**, y los semiplanos se llaman **caras** del diedro.

* **Notación** : (α, P) Para designar un semiespacio es frecuente la notación anterior que se lee semiespacio de borde α que contiene al punto interior P.

14. TRIEDRO CONVEXO

Dadas tres semirrectas de origen común, no coplanarias ni opuestas por el vértice, se define triedro convexo, a la intersección de los semiespacios cuyos bordes están determinados por dos de las semirrectas, y que incluyen a la restante.

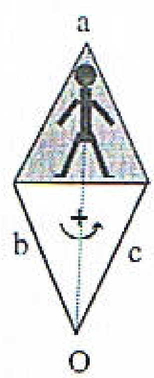


Observaciones

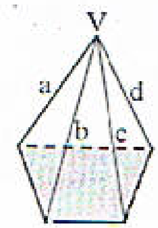
Se usará la siguiente notación : $(\overline{Oa}, \overline{Ob}, \overline{Oc})$, o también (O, a,b,c)
A las semirrectas $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ y $\overline{Oc}$ se les llama **aristas** del triedro, al punto O **vértice** y a los ángulos convexos $a\widehat{O}b$, $a\widehat{O}c$ y $b\widehat{O}c$, **caras** del mismo. Si se considera un orden para las semirrectas, se dice que el triedro queda orientado.

15. SENTIDO EN EL ESPACIO

En el espacio se pueden definir dos sentidos opuestos, y para determinarlos se puede proceder de la siguiente manera :
Se considera un triedro orientado $(\overline{Oa}, \overline{Ob}, \overline{Oc})$ en dicho orden.
Si se situa un observador imaginario, sobre una de las aristas (siempre con los pies hacia el vértice, y de frente a las restantes aristas), se define sentido positivo en el espacio,al sentido de derecha a izquierda del observador, y negativo al opuesto.
El triedro orientado de la figura , tiene sentido positivo.

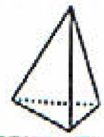


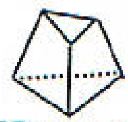
16. ANGULO POLIEDRO CONVEXO



Dadas en un orden, tres, o más semirrectas de origen común, tales que el plano determinado por dos semirrectas consecutivas, deja en un mismo semiespacio a las restantes, se define ángulo poliedro convexo a la intersección de todos los semiespacios cerrados, así determinados.

17. POLIEDROS CONVEXOS


TETRAEDRO


PENTAEDRO

Dados cuatro o más polígonos convexos (llamados caras) que cumplan las siguientes condiciones:

1) cada cara está incluida en diferente plano.
2) cada lado de los polígonos, está incluido en dos caras, y sólo en dos.
3) el plano que incluye cada cara, deja en un mismo semiespacio a las restantes,

se define poliedro convexo, a la intersección de todos los semiespacios cerrados así determinados.

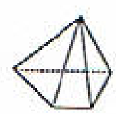
Observaciones

- A la unión de las caras se le llama superficie poliédrica.
- Puesto que las caras son polígonos, el número mínimo de aristas por cada cara es 3.
- Como a cada arista concurren dos caras, se cumple que a cada vértice del poliedro, concurrirán al menos, tres aristas.
- Según el número de caras, los poliedros reciben el nombre de tetraedros (4), pentaedros (5), hexaedros (6), etc ...

17.1 POLIEDROS CONVEXOS PARTICULARES

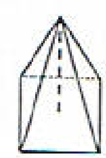
Se detallaran a continuación algunos de los poliedros convexos de mayor interés.

- **PIRAMIDE**



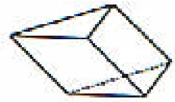
Se llama pirámide al poliedro en que una de las caras es un polígono cualquiera llamado base, y las otras son triángulos que tienen un lado en común con la base, y un punto común a todos los triángulos,llamado vértice de la pirámide.

- **PIRAMIDE REGULAR**

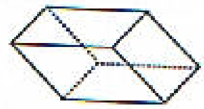


Es toda pirámide cuya base es un polígono regular, y el vértice se encuentra en la recta perpendicular al plano de la base, trazada desde el centro de la misma. Algunos autores llaman pirámide recta a las anteriores, y designan con el nombre de regular , a la pirámide cuyas aristas son iguales.

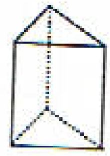
- **PRISMA**
  Es el poliedro limitado por dos caras iguales, incluidas en planos paralelos, (llamadas bases), y cuyas caras laterales, son paralelogramos, que tienen un par de lados opuestos en común con los lados paralelos de las bases.



- **PARALELEPIPEDO**
  Prisma, cuyas bases son dos paralelogramos.

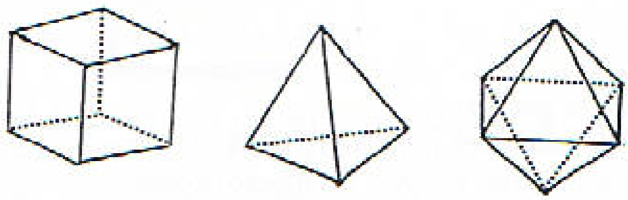


- **PRISMA RECTO**
  Prisma, cuyas aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases.



- **ORTOEDRO**
  Paralelepípedo recto de base rectangular.

- **POLIEDROS REGULARES CONVEXOS**
  Poliedros cuyas caras, son polígonos regulares iguales, y a cuyos vértices, concurren el mismo número de aristas. Los de mayor interés práctico son: **el tetraedro regular**, cuyas caras son cuatro triángulos equiláteros; el **hexaedro regular o cubo**, cuyas caras son seis cuadrados; y el **octaedro regular**, formado por ocho triángulos equiláteros.



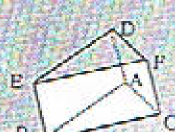
18. DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DE UN POLIEDRO

Cuando se representa un poliedro, se tiene sobre el plano del dibujo, una visión en perspectiva de dicho cuerpo. Si se necesita trabajar con sus elementos en verdadera magnitud, es conveniente efectuar lo que se denomina, desarrollo o patrón del poliedro.

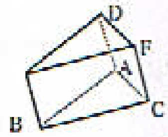
El método consiste en representar las caras del cuerpo, a partir de un plano que contenga una de dichas caras, y colocar las restantes, sobre dicho plano, de modo que cada cara abatida tenga un lado en común con la inicial.

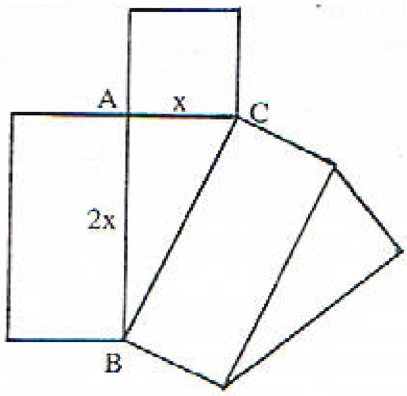
18.1 EJEMPLO

Se considera el prisma recto de la figura cuyas bases son triángulos rectángulos. Las longitudes de los catetos son **x y 2x**, y la de la altura del prisma, es **x**. Construir un desarrollo del prisma a partir de una base y otro a partir de una cara lateral.

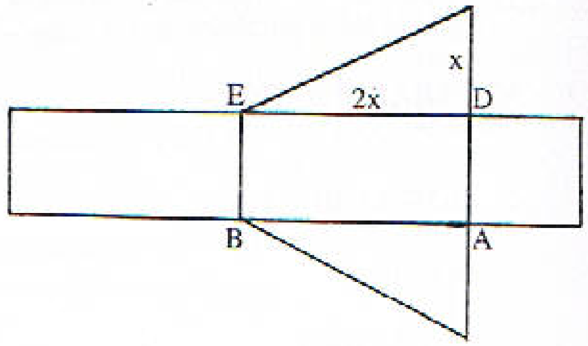


A partir de un segmento de longitud **x**, se efectúan los desarrollos que siguen. x





DESARROLLO A PARTIR DE LA BASE ABC



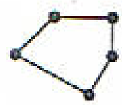
DESARROLLO A PARTIR DE LA CARA ABED

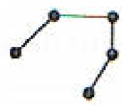
19. TEOREMA DE EULER

En todo poliedro convexo, la suma del número de caras (**c**), más el número de vértices (**v**), es igual a la suma del número de aristas (**a**), más dos unidades.

$$\boxed{c + v = a + 2}$$

Observaciones previas

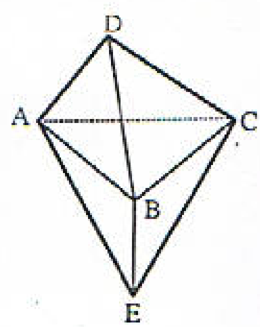
1) En toda línea poligonal cerrada, el número de vértices, es igual al número de lados. ⟹  ⟹ $\boxed{V = L}$

2) En toda línea poligonal abierta, el número de vértices, excede en una unidad, al número de lados. ⟹  ⟹ $\boxed{V = L + 1}$

3) En toda línea poligonal abierta, en la cual no se consideran los vértices extremos, el número de lados, excede en una unidad, al número de vértices . ⟹  ⟹ $\boxed{L = V + 1}$

<ins>Demostración</ins>

En primer lugar se traza una línea poligonal cerrada, cuyos lados sean aristas del poliedro. Esta línea, divide a la superficie, en dos regiones . En el poliedro de la figura, por ejemplo, la poligonal cerrada AECD, divide a la superficie en dos regiones ,tales que , una de ellas contiene las caras ACD y ACE, y la otra, las caras ABE, ABD, BCD y BCE.



Como la poligonal es cerrada, se cumplirá que el número de vértices es igual al número de aristas, $v_1 = a_1$ (obs. 1), y como el número de regiones (r_1) es dos, resulta que $\boxed{r_1 + v_1 = a_1 + 2}$

Efectuando una nueva división en dos, en una de las regiones obtenidas, mediante una línea poligonal abierta, con extremos en los vértices de la poligonal anterior, y cuyos lados sean aristas, (por ejemplo la poligonal abierta A,B,C en la figura), se cumplirán dos condiciones : 1) se ha aumentado en una unidad , el número de regiones, o sea que $r_2 = r_1 + 1$ 2) se ha introducido una línea poligonal abierta, en la cual, no se consideran sus extremos, por lo que, se cumplirá que $a^* = v^* + 1$ (observación 3)

Sean r_2, v_2, y a_2, el número de regiones , vértices y aristas actuales, y r^*, v^* y a^*, los introducidos.

Se cumplirán las siguientes igualdades: $r_2 = r_1 + r^* \Rightarrow r_1 = r_2 - r^* \Rightarrow \mathbf{r_1 = r_2 - 1}$ (pues $r^* = 1$), $v_2 = v_1 + v^* \Rightarrow \mathbf{v_1 = v_2 - v^*}$

$a_2 = a_1 + a^* \Rightarrow \mathbf{a_1 = a_2 - a^*}$

Sustituyendo estas tres últimas igualdades, en la afirmación recuadrada $r_1 + v_1 = a_1 + 2$ se obtiene que , $(r_2 - 1) + (v_2 - v^*) = (a_2 - a^*) + 2$, y considerando que $a^* = v^* + 1$, se cumplirá que . $\boxed{r_2 + v_2 = a_2 + 2}$

Al repetirse el razonamiento n veces, dividiendo en forma análoga, las regiones obtenidas, hasta lograr que cada región se convierta en una cara ($r = c$), la igualdad $\boxed{r_n + v_n = a_n + 2}$, se seguirá cumpliendo, y por lo tanto, se verificará la tesis $\boxed{c + v = a + 2}$

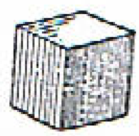
Los poliedros convexos, también reciben el nombre de poliedros Eulerianos.

20. UNICIDAD DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Recordemos que llamamos poliedro regular convexo, a todo poliedro convexo, cuyas caras, son polígonos regulares iguales, y a cuyos vértices, concurren el mismo número de aristas. Los únicos poliedros de este tipo posibles son :

- el tetraedro de cuatro caras triangulares

- el hexaedro de seis caras cuadradas



- el octaedro de ocho caras triangulares

- el dodecaedro de doce caras pentagonales

- el icosaedro de veinte caras triangulares

Demostración

Sea **x** el número de aristas que contiene cada cara. Considerando que cada arista se encuentra incluida en dos caras (definición de poliedro convexo), entonces el número de aristas del poliedro será $\boxed{a = \frac{x.c}{2}}$, con $x \geq 3$, pues cada cara incluye al menos a tres aristas. Análogamente, si **z**, es el número de aristas que concurren a un vértice, y considerando que cada arista incluye dos vértices, el número de aristas del poliedro será $\boxed{a = \frac{z.v}{2}}$, con $z \geq 3$, ya que a cada vértice concurren al menos tres aristas.

Si además se considera la relación de Euler $\boxed{c+v = a+2}$, y tomando como incógnitas **a, c** y **v**, se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 2a - x\,c = 0 \\ 2a - z\,v = 0 \\ -a + c + v = 2 \end{cases}$$

cuya solución será : $a = \dfrac{2.x.z}{2(x+z)-x.z}$, $c = \dfrac{4.z}{2(x+z)-x.z}$ $v = \dfrac{4.x}{2(x+z)-xz}$

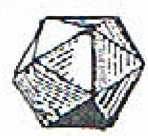
Tomando en consideración que a,c,v,x y z son números naturales, los denominadores deben ser positivos, pues los numeradores lo son.

- Si las caras son triángulos equiláteros, entonces $x = 3$, y el denominador cumplirá que $6 - z > 0$ y como $z \geq 3$, los únicos valores posibles de z serán los siguientes :

❖ $z = 3 \Rightarrow a = 6,\ c = 4,\ v = 4$, que determina al teraedro regular, poliedro cuyas caras son cuatro triángulos equiláteros, de seis aristas y cuatro vértices.

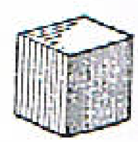
❖ $z = 4 \Rightarrow a = 12,\ c = 8,\ v = 6$, que determina al octaedro regular, poliedro cuyas caras son ocho triángulos equiláteros, de doce aristas y seis vértices.

❖ $z = 5 \Rightarrow a = 30,\ c = 20,\ v = 12$, que determina al icosaedro regular, poliedro cuyas caras son veinte triángulos equiláteros, de treinta aristas y doce vértices.



- Si las caras son cuadrados, entonces $x = 4$, y el denominador cumplirá que $8 - 2z > 0$, con $z \geq 3$, resultando un solo valor posible:

❖ $z = 3 \Rightarrow a = 12,\ c = 6,\ v = 8$, que determina al hexaedro regular o cubo, poliedro formado por seis caras cuadradas, de doce aristas y ocho vértices.



- Si las caras son pentágonos regulares, entonces $x = 5$, y el denominador cumplirá que $10 - 3z > 0$, con $z \geq 3$,de donde:

❖ $z = 3 \Rightarrow a = 30,\ c = 12,\ v = 8$, que determina al dodecaedro regular, poliedro cuyas caras son doce pentágonos regulares, de treinta aristas y veinte vértices.

- Si para las caras se consideran hexágonos regulares, entonces $x = 6$, y para que el denominador $12 - 4z$ resulte positivo, debe imponerse $z < 3$, lo cual es incompatible con la condición $z \geq 3$; repitiéndose la misma imposibilidad, para cualquier $x > 6$, por lo cual, se verifica que no existen más que los cinco poliedros regulares anteriores.

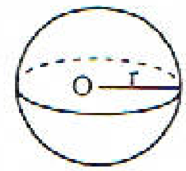
Observación

Es propiedad de los poliedros regulares convexos que todos sus diedros y ángulos poliedros sean congruentes entre sí.

21.- ESFERA Y CASCARA ESFERICA

Dado un punto O del espacio, y un número real **r** no negativo, se define esfera de centro **O** y radio **r**, al conjunto de los puntos del espacio que se encuentran a una distancia de O, menor o igual que **r**.

$\mathcal{E}_{O,r} = \{ P : P \in \mathbf{E}, \overline{PO} \leq r \}$



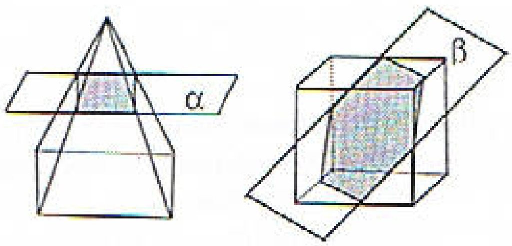
Al conjunto de los puntos del espacio , que equidistan una distancia **r** de O, se le llama cáscara esférica.

$\mathcal{CE}_{O,r} = \{ P : P \in \mathbf{E}, \overline{PO} = r \}$

- En todo poliedro regular, existe un único punto llamado centro del poliedro, que es centro de las esferas circunscrita (esfera que contiene a todos los vértices del poliedro), e inscrita (esfera tangente a todas las caras del poliedro).

22. SECCION PLANA

Al polígono resultante de la intersección, de un poliedro con un plano, se le denomina sección plana. Dicho polígono tiene como lados, las intersecciones de las caras del poliedro, con el plano secante, y como vértices, las intersecciones de las aristas con dicho plano.



Las figuras anteriores, nos muestran un cuadrilátero y un hexágono, respectivas secciones planas de una pirámide y un cubo, con los planos α y β.

23. EJEMPLO

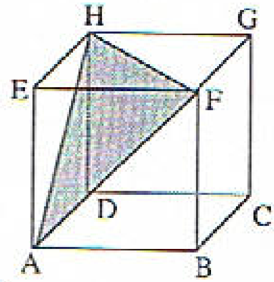
Se considera un cubo ABCDEFGH, cuya arista es de medida dada **a**, y los planos $\alpha = (A,H,F)$ y $\beta = (A,E,C)$.

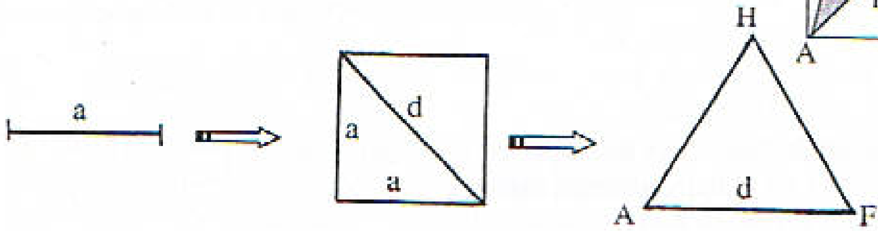
a) Construir en verdadera magnitud la sección plana del cubo con α.

b) Indicar que tipo de poliedro es el AHFC, y construir un desarrollo del mismo.

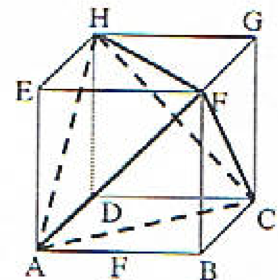
c) Construir en verdadera magnitud la sección plana del poliedro AHFC con el plano β

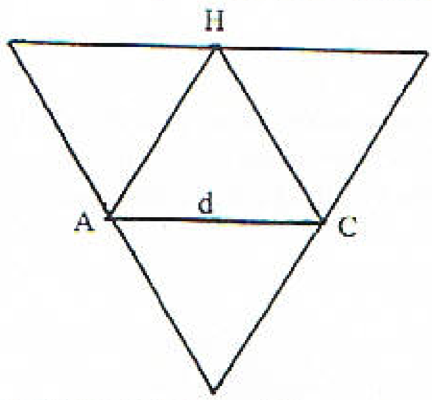
a) La sección plana del cubo con el plano α, es el triángulo equilátero $\widehat{AHF}$, cuyos lados, son diagonales de cara del cubo. Para su construcción, a partir de la arista dada **a** , se construye en primer lugar un cuadrado de lado **a** , y su diagonal **d** será el lado del triángulo equilátero.

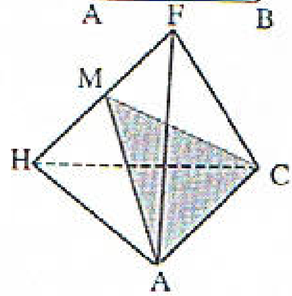




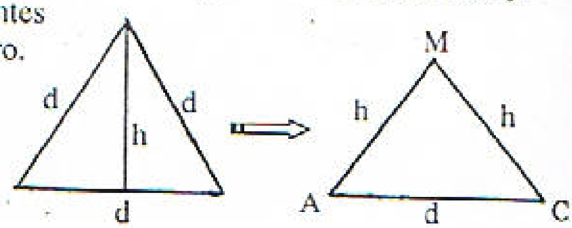
b) Las caras del poliedro AHFC, son triángulos equiláteros, cuyos lados miden la diagonal de cara **d**, por lo que puede deducirse que dicho poliedro es un tetraedro regular.
A continuación se construye un desarrollo a partir de la cara $\widehat{HAC}$.







c) El plano diagonal β, también contiene al vértice G del cubo, y a M punto medio de $\overline{HF}$. Su sección plana con el tetraedro será el triángulo isósceles $\widehat{AMC}$, cuyo lado $\overline{AC}$ tiene medida **d** y los lados congruentes $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$, serán alturas de cara del tetraedro.
Para la construcción de la sección plana, se construye un triángulo equilátero de lado **d** y su altura de medida **h** y a continuación se construye el triángulo isósceles $\widehat{AMC}$.



24. EJERCICIOS

1) Sea un cubo ABCDEFGH de centro O. Se consideran a M punto medio de $\overline{AC}$, y N de $\overline{EG}$, y a los planos α = (BDHF) y β = (ACGE).
   - Indicar las posiciones relativas de la recta AO, respecto a las siguientes: a) EC, b)NG, c)BC, d)HF, e)MC,
   - Indicar las posiciones relativas de la recta MN, respecto a las siguientes: f)BF, g)FH, h)AB, i)FD, j)CG

   En los casos de rectas secantes, indicar punto de intersección y plano que determinan, y en las rectas paralelas, el plano determinado.

2) Se considera un octaedro regular ABCDEF, de arista 3 cms., con M punto medio de $\overline{AB}$, y N de CD. Construir un desarrollo del poliedro, y la sección plana EMFN, en verdadera magnitud.

3) Se dan dos rectas (m) y (n), no coplanarias, y dos puntos $M \in m$ y $N \in n$. Sean α = (M, n) y β = (N, m),. Hallar la intersección de dichos planos.

4) Se considera un tetradro ABCD cualquiera. Se ubican $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{AC}$ y $P \in \overline{CD}$. Hallar la intersección de la recta BD con el plano (M,N,P)

5) Se da un triedro de vértice O, y sobre sus aristas se consideran tres puntos A,B y C tales que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Sea G el baricentro del $\overset{\triangle}{ABC}$. Probar que los planos determinados por cada arista y la bisectriz de la cara opuesta, se cortan según la recta OG

6) Sean A,B,C y D, cuatro puntos no coplanarios y $K \in \overline{AB}$, $L \in \overline{BC}$ y $M \in \overline{AD}$ Hallar las siguientes intersecciones : a) (A,B,C) $\cap$ (K,L,M), b) (A,B,D) $\cap$ (K,L,M) c) AC $\cap$ (K,L,M), d) BD $\cap$ (K,L,M), e) (A,C,D) $\cap$ (K,L,M)

7) Dados tres planos α, β y γ, y sus intersecciones : $\alpha \cap \beta = r$, $\alpha \cap \gamma = s$, $\beta \cap \gamma = t$, con r, s y t no paralelas entre sí, demostrar que los tres planos se cortan en un único punto I, común.

8) Sean α y β dos planos secantes en (r). Se consideran dos puntos A y B, pertenecientes a α, tal que AB $\cap r = \{C\}$. Sea un punto O, exterior a α y β, tal que OA $\cap \beta = \{P\}$ y OB $\cap$ $\beta = \{Q\}$. Demostrar que P, Q y C están alineados.

9) Sea ABCD un tetraedro regular con M punto medio de CD y N de $\overline{AB}$. Sea $G \in \overline{MN}$. Hallar las siguientes intersecciones: a) (D,G,N) $\cap$ (A,B,C) b) DG $\cap$ (A,B,C) $\doteq$ {I}

10) Dadas dos rectas que se cruzan (a) y (b), y un punto exterior P, trazar por P una recta (r) que corte a (a) y (b).

11) Hallar una recta (r) que corte a tres rectas (a), (b) y (c), que se cruzan dos a dos .

12) Dadas tres rectas (a), (b) y (c), no coplanarias, hallar tres planos α, β y γ, que se corten en una recta común (i) , y tal que $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ y $c \subset \gamma$.

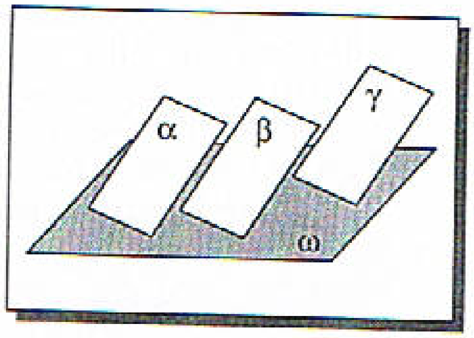
13) Se da una pirámide regular de base cuadrada ABCDV, de lado 4 cm. y de altura de cara $\overline{MV}$ = 6 cm. , siendo M punto medio de $\overline{CD}$.
a) Efectuar un desarrollo en verdadera magnitud de la pirámide.
b) Construir en verdadera magnitud la sección plana de la pirámide con el plano α = (V,O,M), siendo O el centro del cuadrado.
c) Efectuar un desarrollo en verdadera magnitud del tetraedro ABMV.

14) Se da un cubo ABCDEFGH. de arista 4 cm.
Sean M, N y P, puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.
a) Construir un desarrollo del tetraedro MNPA, en verdadera magnitud.
b) Construir el desarrollo del poliedro MNPBCDEFGH, que resulta de "extraer" el tetraedro anterior al cubo.

15) Sea un cubo ABCDEFGH de arista 3 cm. Sobre las diagonales de cara $\overline{AC}$ y $\overline{EG}$ se toman M y N . tal que $\overline{AM}$ =3/4 $\overline{AC}$ y $\overline{EN}$ = 3/4 $\overline{EG}$.
a) Construir en verdadera magnitud el triángulo $\widehat{AMN}$.
b) Efectuar en verdadera magnitud el desarrollo de la pirámide ABCDN.

CAPITULO 14

PARALELISMO EN EL ESPACIO



1. PARALELISMO ENTRE RECTAS Y PLANOS

1.1 DEFINICION

Una recta es paralela a un plano, si su intersección es vacía, o si está incluida en él.

$r \cap \alpha = \emptyset$ $\Leftarrow$ $\boxed{r \parallel \alpha}$ $\Rightarrow$ $r \subset \alpha$

1.2 CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO.

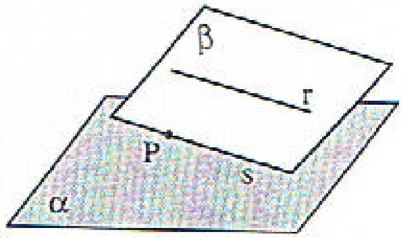
La condición necesaria y suficiente, para que una recta (r), sea paralela a un plano α, es que exista en dicho plano una recta (s), paralela a ella.

Demostración

Se probará en primer lugar que si :

$r \parallel \alpha \Rightarrow$ **existe** $s \subset \alpha$**, tal que** $r \parallel s$

- Si (r) esta incluida en α, la tesis es inmediata, pues s = r
- Si (r) no está incluida en α, existe un punto P de α, tal que con (r), determinan un plano β, distinto de α. Como α y β tienen un punto en común P, entonces su intersección es una recta (s), que contiene a P.

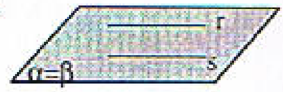


Como $s \subset \alpha$ y $r \cap \alpha = \emptyset$, se cumplirá que $r \cap s = \emptyset$ y considerando que ambas rectas están incluidas en β, entonces serán paralelas. Se demostrará a continuación que si :

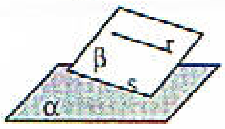
$\mathbf{r \parallel s, s \subset \alpha \Rightarrow r \parallel \alpha}$

Como (r) y (s), son paralelas, entonces por definición son coincidentes, o son coplanarias de intersección vacía.

- Si $r = s$, entonces (r) está incluida en α , y por lo tanto es paralela al plano.
- Si $r \cap s = \emptyset$, existe un plano β que incluye a ambas rectas.

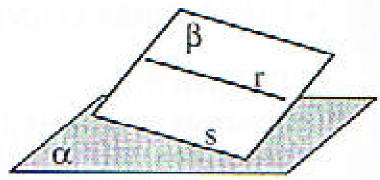


Si $\alpha = \beta$ entonces la recta (r),se halla incluida en α y por lo tanto $r \parallel \alpha$.



Si $\alpha \neq \beta$, entonces la recta (s) será la intersección de los planos, y como $r \cap s = \emptyset$ entonces $r \cap \alpha = \emptyset$, y en consecuencia $r \parallel \alpha$.

1.3 EJERCICIO TEORICO



Demostrar que si una recta (r) es paralela a un plano α, todo plano β que incluya a la recta (r) y corte a α, lo hace según una recta (s), paralela a (r).

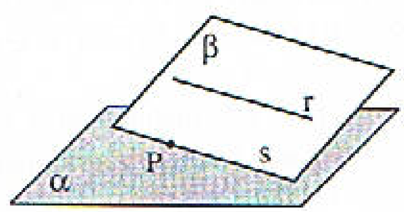
1.4 Paralela a una recta por un punto de un plano paralelo.

Si una recta (r) es paralela a un plano α, toda recta (s) paralela a ella por un punto P del plano, está incluida en él.

<u>Demostración</u>

- Si (r) está incluida en α, el plano que determinan las paralelas (r) y (s), debe ser α , pues $P \in \alpha$

- Si (r) es exterior a α, (r) y P determinan un plano β, que por contener a una recta (r) paralela a α, corta a éste según una recta paralela a (r).
  Como por el axioma de paralelismo, dicha recta es única , entonces debe ser (s).
  Se concluye entonces que $\alpha \cap \beta = s$, por lo cual (s) esta incluida en α , como se quería demostrar.

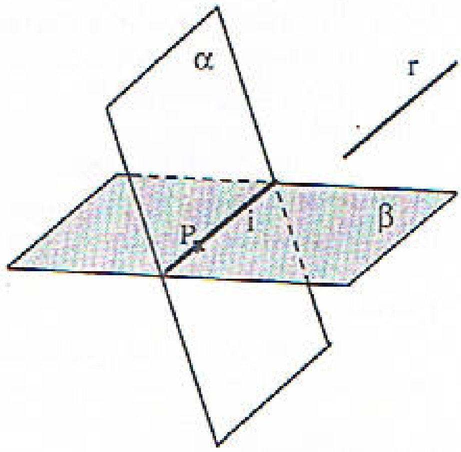


1.5. RECTA PARALELA A DOS PLANOS SECANTES

Si una recta (r) es paralela a dos planos secantes α y β, entonces es paralela a su intersección (i).

<u>Demostración</u>

Sea un punto P de la recta (i).
Por axioma de paralelismo, existe y es única la paralela a (r) por P. Sea (p) dicha recta.
Como $P \in \alpha$, y $p \parallel r$, se cumple que $p \subset \alpha$.
Como $P \in \beta$, y $p \parallel r$, se cumple que $p \subset \beta$.
De las últimas dos afirmaciones se deduce que $p = \alpha \cap \beta$, y como por hipótesis $\alpha \cap \beta = i$, se concluye que $p = i$, y en consecuencia $r \parallel i$, como se quería probar.



1.6 EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PLANO PARALELO A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Dado un punto P, existe y es único el plano α que lo contiene y es paralelo a dos rectas que se cruzan (a) y (b).

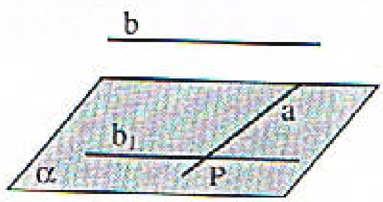
<u>Demostración</u>

Se distinguirán dos casos, según el punto pertenezca o no, a alguna de las rectas.

- **$P \in a$**

Existencia

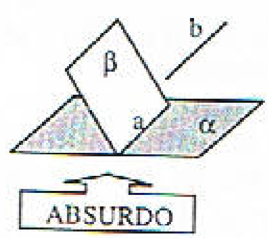
Basta trazar por P, la recta (b_1), paralela a (b). El plano α determinado por (a) y (b_1), será paralelo a (b), por contener una recta paralela a ella, y a (a), por incluirla.



Unicidad

Supongamos por absurdo que existen dos planos α y β que incluyen a la recta (a), y son paralelos a (b).

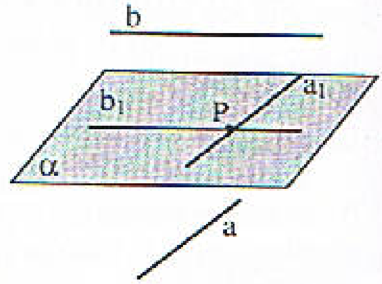
Como la recta (a) es la intersección de ambos planos, y (b) es paralela a ambos planos, entonces aplicando el teorema anterior, se cumplirá que $a \parallel b$, en contradicción con la hipótesis de que las rectas (a) y (b) se cruzan, por lo que, es absurdo suponer que α no es único.



❖ $P \notin a$, $P \notin b$

Existencia

Si por el punto P, se consideran las rectas (a_1) y (b_1), paralelas a (a) y (b),respectivamente, el plano α determinado por estas rectas, será paralelo a (b) y (a), y contendrá a P.

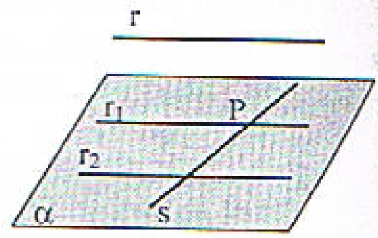


Unicidad

La unicidad del plano, queda demostrada a partir de la unicidad de las paralelas y la unicidad del caso anterior. (Obsérvese que se repite el caso anterior para las rectas (b) y (a_1).)

Corolario

Dadas dos rectas que se cruzan (r) y (s), todas las paralelas a (r), que cortan a (s), son coplanarias.

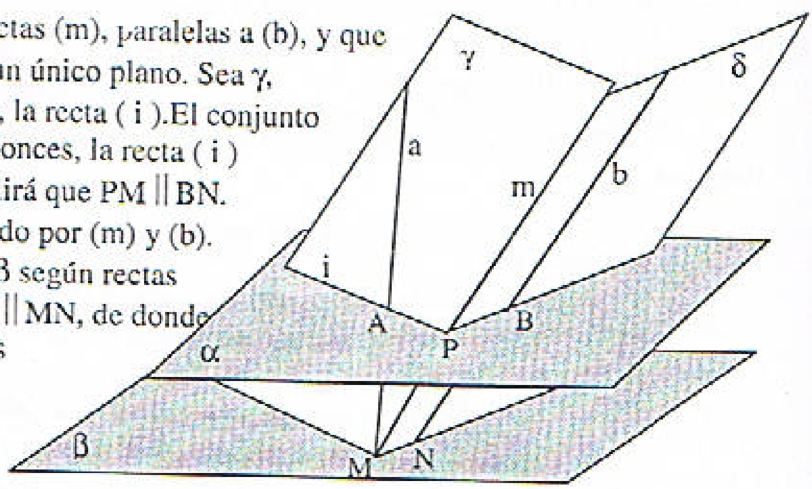


Demostración

Aplicando la propiedad anterior, existe y es único el plano α que contiene a (s), y es paralelo a (r). Como toda recta paralela a (r),que pase por un punto del plano α , está incluida en él, y este es único , se concluye la tesis.

I.7 EJEMPLO

Se considera un plano α, y dos rectas no coplanarias (a) y (b), que lo cortan en A y B. Por un punto M perteneciente a (a), se considera la recta (m) paralela a (b), y que corta a α en P.
Por M, se traza el plano β, paralelo a α, y que corta a la recta (b) en N
a) Hallar el conjunto de los puntos P, al variar M en (a).
b) Justificar la naturaleza de el cuadrilátero BPMN.
c) Hallar M para que $\overline{MN} = x$, siendo x , una medida dada.



a) El conjunto de las rectas (m), paralelas a (b), y que cortan a (a),determinan un único plano. Sea γ, y su intersección con α, la recta (i).El conjunto de los puntos P, será entonces, la recta (i)
b) Como m || b, se cumplirá que PM || BN. Sea δ el plano determinado por (m) y (b). Dicho plano corta a α y β según rectas paralelas, por lo que PB || MN, de donde el cuadrilátero BPMN, es paralelogramo
c) Como $MN = \overline{PB}$ (paralelogramo), se construye el triángulo $\widehat{APB}$, del cual, A y B son fijos, $P \in$ i y $\overline{PB} = x$. Luego por P se traza la paralela (m) a la recta (b) y la intersección de las rectas (m) y (a), será el punto M buscado.

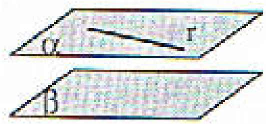
2. PARALELISMO ENTRE PLANOS

2.1 DEFINICION

Dos planos son paralelos, si su intersección es vacía, o si son coincidentes.

2.2 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que si dos planos son paralelos, toda recta (r), incluida en uno de ellos, es paralela al otro.



2.3 CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE PARALELISMO ENTRE PLANOS

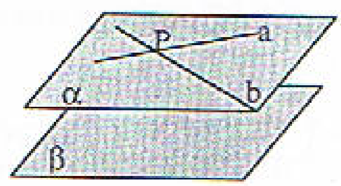
La condición necesaria y suficiente, para que dos planos α y β sean paralelos, es que uno de ellos, incluya dos rectas secantes (a) y (b), que sean paralelas al otro.

<u>Demostración</u>

Se demostrará en primer lugar que si :

$\alpha \parallel \beta,\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\} \Rightarrow a \parallel \beta,\ b \parallel \beta$

Como $\alpha \parallel \beta$, las rectas (a) y (b) tendrán intersección vacía con β, o estarán incluidas en el plano, por lo que serán paralelas a él.



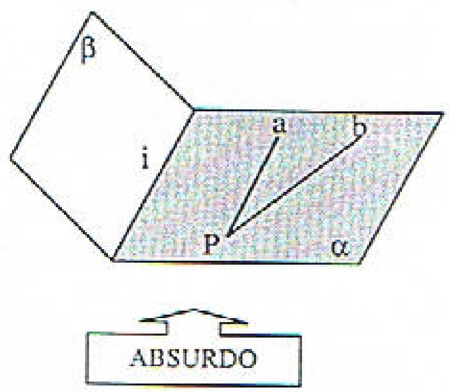
A continuación se demostrará que si :

$a \subset \alpha, b \subset \alpha,\ a \parallel \beta,\ b \parallel \beta,\ a \cap b = \{P\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

Supongamos por absurdo que α y β no son paralelos, de donde existe una recta (i) intersección de ambos planos.

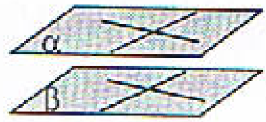
Si una recta (a) es paralela a un plano β, y está incluida en un plano α, entonces será paralela a la intersección de los planos , o sea $a \parallel i$.

Si se razona igual para la recta (b), se tendrá que $b \parallel i$. Considerando que por un punto P, existe por axioma, una sola paralela a la recta (i) , se deduce que las rectas (a) y (b) deben coincidir, en contradicción con la hipótesis, de que las rectas son secantes, por lo que, es absurdo suponer que los planos α y β no son paralelos.



Corolario

Si un plano incluye, dos rectas secantes, paralelas a otro par de rectas secantes, incluidas en otro plano, entonces los planos son paralelos.



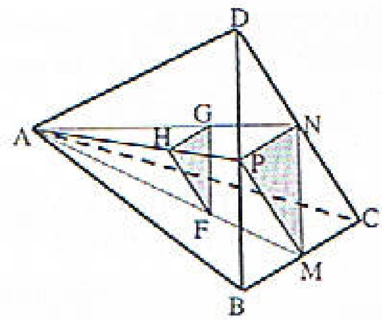
2.4 EJEMPLO

Sea ABCD un tetraedro y M, N y P los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$. Sean F, G y H los baricentros de los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ACD}$ y $\overset{\triangle}{ABD}$ respectivamente

a) Probar que FG || MN, GH || NP y FH || MP

b) Probar que los planos α = (F,G,H) y β = (B,C,D) son paralelos.

a) Como $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AN}} = \dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AM}} = \dfrac{2}{3}$, por ser F y G baricentros de los triángulos, se cumplirá, aplicando el recíproco del teorema de Thales, que FG || MN. Se razona análogamente para los restantes casos



b) En el plano α, se encuentran por ejemplo las rectas secantes FG y FH, que son respectivamente paralelas, a las secantes MN y MP incluidas en el plano β, por lo que si se aplica el corolario anterior, se puede concluir que α || β.

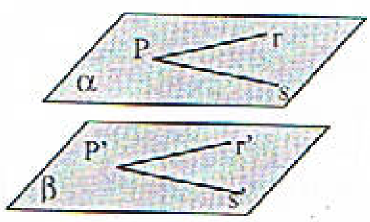
2.5 EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PLANO PARALELO A OTRO POR UN PUNTO

Dado un punto P, y un plano β. existe y es único el plano α, que contiene a P y es paralelo a β.

<u>Demostración</u>

Existencia

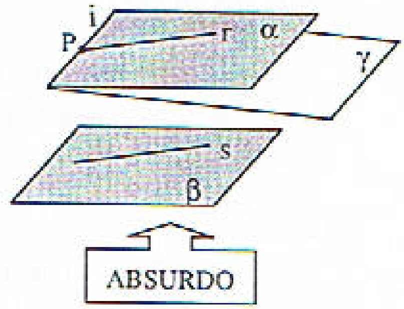
Para argumentar la existencia del plano α , basta considerar por el punto P, dos



rectas (r) y (s) paralelas a dos rectas secantes (r') y (s') cualesquiera del plano β. En estas condiciones, el plano α determinado por (r) y (s), será paralelo a β.

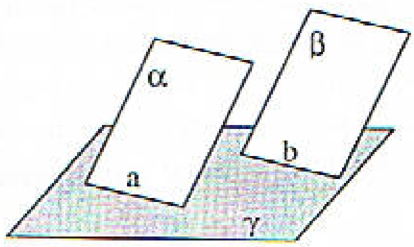
Unicidad

Supongamos dos planos α y γ, paralelos al plano β, por el punto P.
Por P se considera una recta (r), distinta de (i), e incluida en α. Como $\alpha \parallel \beta$, existirá en β, una recta (s), paralela a (r) Así mismo, como $P \in \gamma$, y $\gamma \parallel \beta$, se cumplirá que la recta paralela a (s) por P, debe estar incluida en el plano γ. Como dicha paralela es única, es necesariamente la recta (r). Considerando que las rectas (r) e (i), determinan un plano único, se debe de cumplir que $\alpha = \gamma$.



2.6 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que dos planos paralelos α y β, cortan a un tercero γ, según dos rectas paralelas (a) y (b).

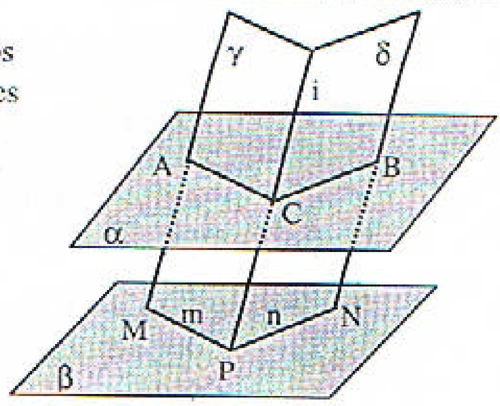


2.7 EJEMPLO

Se dan dos planos α y β, paralelos, y los puntos A, B y C pertenecientes a α, y M y N, pertenecientes a β. Se consideran los planos $\gamma = (A,C,M)$ y $\delta = (B,C,N)$
Determinar la recta intersección (i), entre los planos γ y δ.

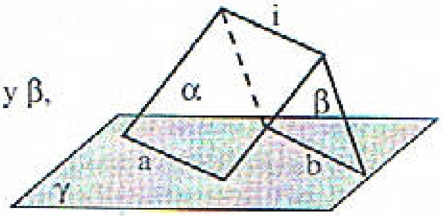
Como $\alpha \parallel \beta$, γ y δ, cortarán a dichos planos según rectas paralelas. Como $\gamma \cap \alpha = AC$, entonces la intersección entre γ y β, será una recta paralela a AC por M. Sea (m). Razonando del mismo modo para el plano δ, su intersección con β será la paralela a BC por N. Sea (n), luego $n \cap m = \{P\}$.

Los puntos comunes P y C a ambos planos determinan la recta intersección (i) buscada.



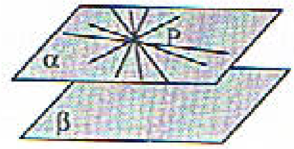
2.8 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que si dos planos secantes α y β, cortan a un tercero γ, según rectas paralelas (a) y (b), su intersección (i), es paralela a estas rectas .



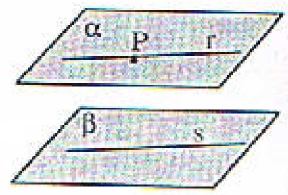
2.9 LUGAR GEOMETRICO DE LAS RECTAS PARALELAS A UN PLANO POR UN PUNTO

El lugar geométrico de las rectas paralelas, a un plano β por un punto P del espacio, es el plano α, paralelo a β, por P.



Demostración

Se probará en primer lugar, que si una recta (r) es paralela a β por P, entonces está incluida en α. Si $r \parallel \beta$, entonces existe una recta (s), incluida en β y paralela a (r). Como $\alpha \parallel \beta$, y (s) está incluida en β, entonces (s) es paralela a α. Si por P se considera la paralela a (s), ésta debe estar incluida en α, y como dicha paralela es única , debe ser la recta (r), de donde, se deduce que (r) esta incluida en α.



Recíprocamente, toda recta (r), incluida en α, es paralela a β, pues como $\alpha \parallel \beta$, se cumplirá que $r \cap \beta = \emptyset$ o $r \subset \beta$, de donde $r \parallel \beta$, como se quería probar.

3. EL PARALELISMO EN EL ESPACIO, COMO RELACION DE EQUIVALENCIA.

3.1 PARALELISMO ENTRE RECTAS

La relación paralelismo entre rectas en el espacio, es una relación de equivalencia.

Demostración

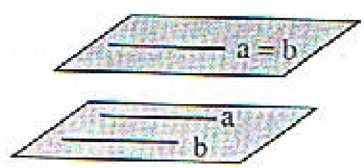
Se probarán a continuación las tres propiedades que cumplen las relaciones de equivalencia :

- **Idéntica** $\quad a \parallel a$

Como a = a, entonces por definición de rectas paralelas, se cumple que $a \parallel a$

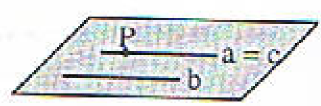
- **Recíproca** $\quad a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

Si a = b, se cumple que b = a, de donde $b \parallel a$.
Si $a \cap b = \emptyset$, entonces existe un plano α que incluye a (a) y (b), y aplicando la propiedad conmutativa de la intersección de conjuntos, se cumple que $b \cap a = \emptyset$, o sea que $b \parallel a$.

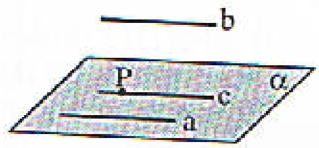


- **Transitiva** $\quad a \parallel b , b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

Se presentan dos casos: que (a) y (c) tengan algún punto en común, o que sean disjuntas.
Si (a) y (c) tienen un punto P en común, se debe de cumplir que a = c, pues por axioma, la paralela a (b) por P es única , o sea que $a \parallel c$.



Si $a \cap c = \varnothing$, entonces aplicando la conmutativa de la intersección de conjuntos, se cumplirá que $c \cap a = \varnothing$.
Se probará a continuación que (a) y (c), están incluidas en un mismo plano.



Sea el plano α determinado por un punto P, de la recta (c) y por la recta (a). Como $a \parallel b$, se cumplirá que $b \parallel \alpha$. La recta (c), debe estar incluida en α, pues es paralela a (b) y contiene al punto P perteneciente a dicho plano.
Se concluye entonces que (a) y (c), son coplanarias disjuntas, por lo que son paralelas.

Dirección de una recta

Por ser el paralelismo de rectas, una relación de equivalencia, determina en el conjunto de todas las rectas del espacio, una partición en clases de equivalencia, llamadas **direcciones**, de modo que, si dos rectas son paralelas, tienen la misma dirección.

3.2 PARALELISMO ENTRE PLANOS

La relación paralelismo entre planos es una relación de equivalencia.

Demostración

- **Idéntica** $\alpha \parallel \alpha$

Como $\alpha = \alpha$, entonces por definición de planos paralelos, se cumple que $\alpha \parallel \alpha$.

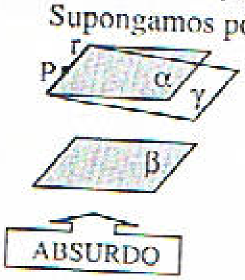
- **Recíproca** $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$

Si $\alpha = \beta$, por la propiedad recíproca de la igualdad de conjuntos se cumple que $\beta = \alpha$, de donde $\beta \parallel \alpha$.

Si $\alpha \cap \beta = \varnothing$, por la propiedad recíproca de la intersección de conjuntos, se cumple que $\beta \cap \alpha = \varnothing$, por lo que $\beta \parallel \alpha$.

- **Transitiva** $\alpha \parallel \beta,\ \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

Supongamos por absurdo, que los planos α y γ se cortan en una recta (r), y sea P un punto de dicha recta.

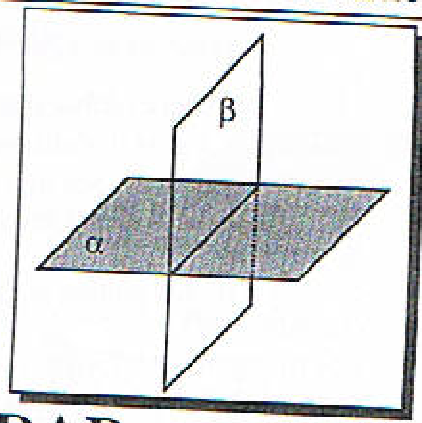


Por P, existe y es único el plano α paralelo a β, y como $\alpha \parallel \beta$, y $\alpha \neq \gamma$, por ser secantes, se deduce que γ no es paralelo a β, en contradicción con la hipótesis inicial $\beta \parallel \gamma$, por lo que, es absurdo suponer que α y γ no son paralelos.

El paralelismo entre planos, determina en el conjunto de todos los planos del espacio, una partición en clases de equivalencia, llamadas **orientaciones**, de modo que si dos planos son paralelos, tienen la misma **orientación**.

4. EJERCICIOS

1) Sean (a) y (b) dos rectas que se cruzan, y un punto P exterior a ambas. Determinar un plano α paralelo a ambas rectas y que contenga al punto.
2) Se considera un plano α, y en él un trapecio ABCD, con $AB \parallel CD$. Sean V, $V \notin \alpha$, M punto medio de $\overline{VC}$, y N punto medio de $\overline{VD}$. probar que la recta MN es paralela al plano (V,A,B)
3) Por un punto dado P , trazar una recta (r), que corte a una recta (s) dada, y que sea paralela a un plano α dado.
4) Dadas tres rectas (a), (b) y (c), no coplanarias dos a dos, determinar una recta (r), paralela a (c) y que corte a (a) y (b).
5) Se considera un tetraedro ABCD y M, N y P, puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ Y $\overline{CD}$. Probar que los planos (M,N,P) y (A,B,C) son paralelos.
6) Sea un tetraedro ABCV y M, N, P y Q puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CV}$ y $\overline{AV}$ respectivamente.
   a) Demostrar que M, N, P y Q son coplanarios.
   b) Demostrar que los segmentos determinados por los puntos medios de aristas opuestas del tetraedro son concurrentes en su punto medio.
7) Sean (a) y (b), dos rectas paralelas y π, el plano que determinan. Sea $O \notin \pi$ y los planos $\alpha = (OA, a)$ y $\beta = (OB, b)$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de (a) y (b). Determinar la recta intersección (i), de ambos planos.
8) Se dan un plano α, una circunferencia $\mathscr{C}$, incluida en él, y un punto P exterior al plano. Se considera el conjunto $\mathscr{P}$, de los planos determinados por P, y una recta (t), tangente a la circunferencia.
   a) Hallar un plano β perteneciente a $\mathscr{P}$, tal que $\beta \parallel r$, siendo (r), una recta cualquiera de α.
   b) Determinar un plano γ, perteneciente a $\mathscr{P}$, tal que $\gamma \parallel s$, siendo (s), una recta cualquiera no incluida en α.
9) Sea ABCDEFGH un cubo y P punto medio de la arista $\overline{BF}$. Sean los planos $\alpha = (A,B,C)$ y $\beta = (E,P,G)$
   a) Hallar la recta $i = \alpha \cap \beta$
   b) Probar que $EG \parallel i$.
10) Se considera una pirámide de base rectangular ABCD y vértice V. Sean M y N, puntos medios de $\overline{AV}$ y $\overline{CV}$, y el plano $\alpha = (A,B,C)$.
   a) Probar que $MN \parallel \alpha$.
   b) Sea G_1 el baricentro del triángulo $\widehat{VAB}$ y G_2 el baricentro del $\widehat{VBC}$. Probar que G_1G_2 es paralela al plano α



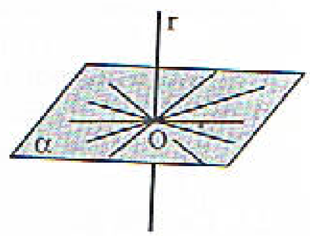
CAPITULO 15

PERPENDICULARIDAD

1. PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS

Definición

Dada una recta (r) y un plano α, que se cortan en un punto O, se afirma que (r) es perpendicular a α, si y sólo si, (r) es perpendicular a toda recta del plano que pase por O.



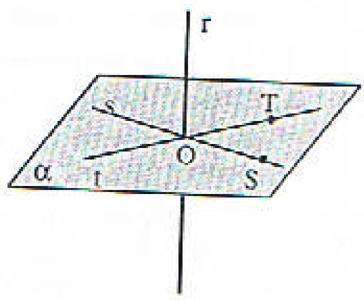
2. CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

La condición necesaria y suficiente para que una recta (r) sea perpendicular a un plano α, es que ésta sea perpendicular a dos rectas secantes (s) y (t) de dicho plano, en su punto de intersección O.

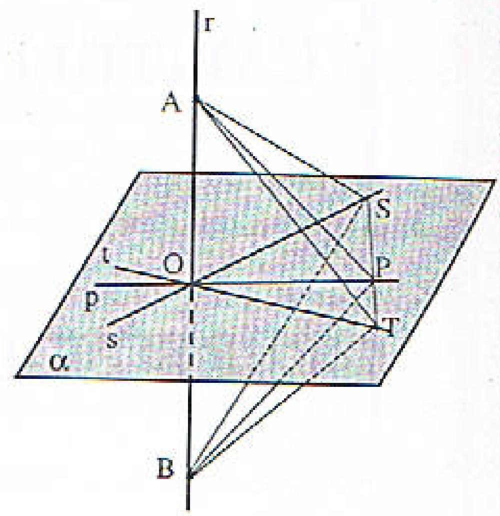
Demostración

Se probará en primer lugar que si $r \perp \alpha$, entonces existen en α , dos rectas perpendiculares a (r).

Como $r \perp \alpha$, por definición, (r) será perpendicular a toda recta del plano que pase por su pie O. Basta considerar dos puntos de α , T y S, no alineados con O, para que queden determinadas dos rectas (s) y (t), perpendiculares a (r).



Se demostrará a continuación que si existen dos rectas de α perpendiculares a (r) por O, entonces se cumple que $r \perp \alpha$.



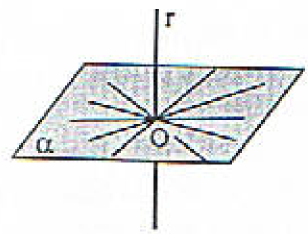
Se deberá probar que toda recta (p), que pase por O, y esté incluida en α, es perpendicular a (r). Sea un punto $P \in p$, $P \neq O$.
Por P, se considera una recta que corte a (s) en S, y a (t) en T.
Sean A y B, dos puntos distintos de (r), tales que $\overline{AO} = \overline{BO}$.
Los triángulos $\widehat{AST}$ y $\widehat{BST}$, son congruentes, pues en el plano (A,B,S), la recta OS , es mediatriz del segmento $\overline{AB}$, entonces $\overline{AS} = \overline{BS}$.
Con igual razonamiento en el plano (A,B,T), se deduce que $\overline{AT} = \overline{BT}$.
Como el lado $\overline{ST}$ es común, y aplicando el criterio L.L.L., los triángulos mencionados, serán congruentes.

Así mismo, los triángulos $\widehat{APT}$ y $\widehat{BPT}$, también serán congruentes, ya que el lado $\overline{PT}$ es común, $\overline{AT} = \overline{BT}$, y $\widehat{ATP} = \widehat{BTP}$ (por la congruencia de los triángulos demostrada anteriormente).

Se concluye que en el plano (A,P,B), se cumplirá que $\overline{AP} = \overline{BP}$, o sea que P pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Como dicha mediatriz contiene a O y P, entonces será la recta (p), por lo que $p \perp r$, que era lo que se quería probar.

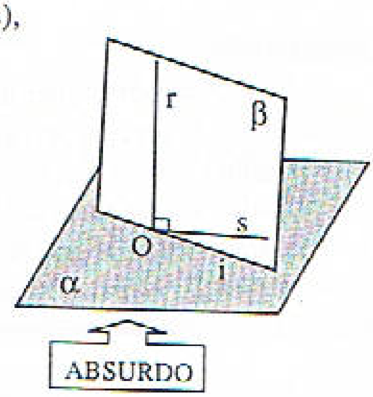
2.1 Corolario

El lugar geométrico de las perpendiculares a una recta (r), por un punto O de ella, es el plano α perpendicular a (r) por O.



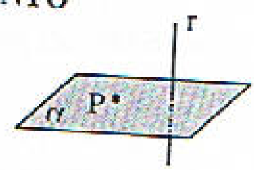
Es inmediato que toda recta incluida en α y que pase por O, es perpendicular a (r), pues $r \perp \alpha$.

A continuación se demostrará que toda recta (s), perpendicular a (r) por O, está incluida en α.
Supongamos por absurdo, que existe una recta (s), en las condiciones anteriores, no incluida en el plano.
Sea β el plano determinado por (r) y (s), y $\alpha \cap \beta = i$
En el plano β, la recta perpendicular a (r) por O es única,(demostrado en geometría del plano), y como $r \perp i$, entonces se tiene que cumplir que s = i, lo cual resulta contradictorio, pues (s) no está incluida en α .
Se concluye entonces que todas las rectas perpendiculares a (r), por O, se encuentran en el plano α, **plano único**, perpendicular a (r) por O.



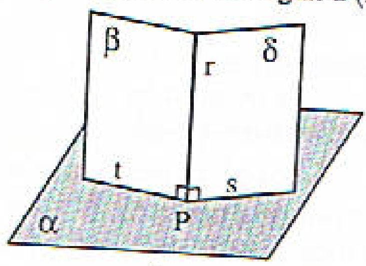
3. PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA POR UN PUNTO

Dados un punto P y una recta (r), **existe** y es **único**, el plano α, perpendicular a la recta por el punto.



Demostración

- **Si P∈ r**, basta considerar dos planos β y δ, cualesquiera , que contengan a (r), y en ellos trazar las perpendiculares a (r) por P, (s) y (t).Dichas rectas determinan un plano α perpendicular a (r), Este plano es único, ya que todas las perpendiculares a (r) por P, están incluidas en dicho plano.

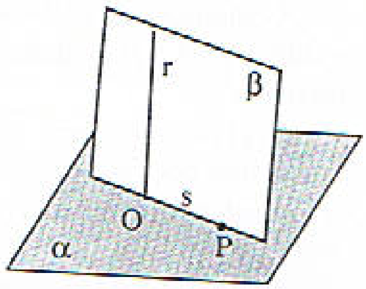


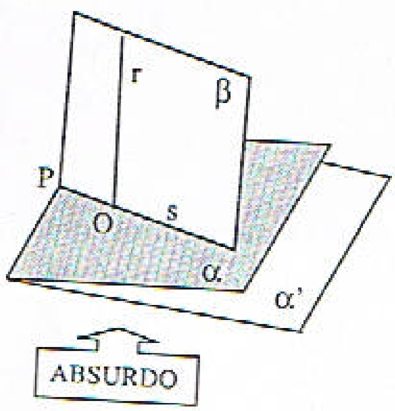
- **P∉ r**

Existencia

Sea el plano β determinado por (r) y P, y en dicho plano la recta (s), perpendicular única, por P a (r), y sea O, su punto de intersección.

El plano α, perpendicular a (r) por O, contiene a la recta (s), y por lo tanto contiene al punto P.





Unicidad

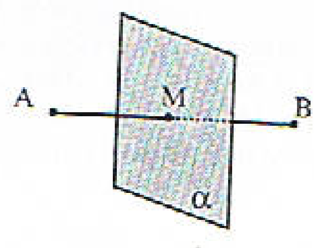
Supongamos que existen dos planos α y α', perpendiculares a (r), por P.

En el plano β, ya se argumentó anteriormente, que la recta (s), es única, por lo que, como dicha recta debe estar incluida en α y también en α'(pues ambos planos son perpendiculares a (r)) se cumple que el punto O pertenece a ambos planos. Luego por O, el plano perpendicular a (r), es único, entonces se concluye que α = α'.

4. PLANO MEDIATRIZ

Definición

Dados dos puntos A y B, se denomina plano mediatriz del segmento $\overline{AB}$, al plano perpendicular al mismo, por su punto medio.



Observación

El plano mediatriz, **existe y es único**, a consecuencia de la existencia y unicidad, del punto medio del segmento, y del plano perpendicular a la recta , por dicho punto.

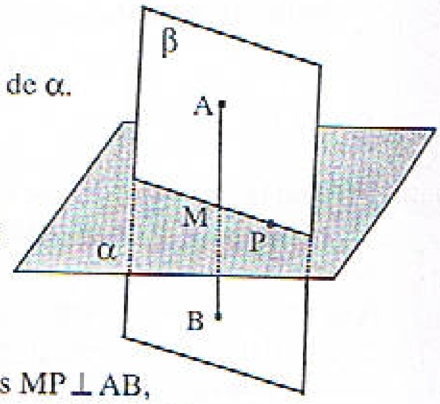
4.1 EL PLANO MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMETRICO

El lugar geométrico de los puntos del espacio, que equidistan de dos puntos dados A y B, es el plano mediatriz α, determinado por dichos puntos.

Demostración

Se demostrará en primer lugar que todos los puntos P,del plano mediatriz equidistan de A y B.

Sea M, el punto medio de $\overline{AB}$, y β el plano determinado por la recta AB y un punto P cualquiera de α. En dicho plano , la recta PM es la mediatriz de $\overline{AB}$, (recta perpendicular por su punto medio), entonces $\overline{PA} = \overline{PB}$, como se quería probar.



A continuación se demostrará que si un punto P, equidista de A y B , entonces pertenece al plano mediatriz α.

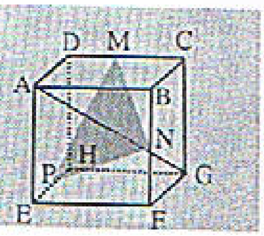
En el plano β, como $\overline{PA} = \overline{PB}$, P pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, (recta MP), entonces $MP \perp AB$, y por lo tanto estará incluida en el plano perpendicular a AB , por M, o sea α.

4.2 EJEMPLO

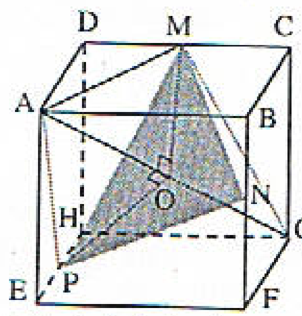
Se considera un cubo ABCDEFGH, de arista **a**, y centro O. siendo M, N y P, los puntos medios de $\overline{CD}$, $\overline{BF}$, y $\overline{EH}$.

a) Probar que M, N y P, pertenecen al plano mediatriz de $\overline{AG}$.

b) Demostrar que O es el circuncentro del triángulo $\widehat{MNP}$.



a) Se demostrará que M, equidista de A y G, siendo el razonamiento para N y P, análogo. Si se consideran los triángulos $\widehat{MDA}$ y $\widehat{MCG}$, estos serán congruentes, pues $\overline{MD} = \overline{MC}$ (a / 2), AD = CG (a), y $\widehat{MDA} = \widehat{MCG} = 90°$. Aplicando el criterio L.A.L., los triángulos resultan congruentes y en particular sus lados $\overline{MA} = \overline{MG}$, por lo que M equidista de A y G, y en consecuencia, pertenece a su plano mediatriz.

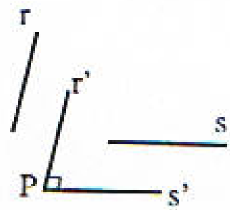


b) Como O es el punto medio de $\overline{AG}$, pertenece al plano mediatriz.. Los triángulos $\widehat{AOM}$, $\widehat{AON}$ y $\widehat{AOP}$, son congruentes , pues tienen un lado en común $\overline{AO}$, además $\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{AP}$, y $\widehat{AOM} = \widehat{AON} = \widehat{AOP} = 90°$. Si se aplica el criterio L.L.A., los triángulos resultaran congruentes, y en particular sus lados $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP}$, de donde se deduce que O es el circuncentro del triángulo.

5. RECTAS ORTOGONALES

Definición

Dos rectas (r) y (s), son ortogonales si sólo si, sus respectivas paralelas (r') y (s'), por un punto P cualquiera del espacio, resultan perpendiculares.

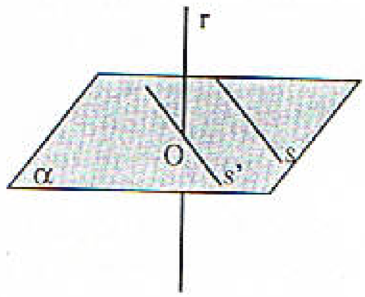


- Para indicar (r) ortogonal con (s), se anotará $r \stackrel{\perp}{-} s$.
- Las rectas ortogonales pueden ser rectas que se cruzan o rectas secantes.
- Las rectas perpendiculares, son ortogonales secantes, o sea que si $r \perp s \Rightarrow r \stackrel{\perp}{-} s$

6. RECTA ORTOGONAL CON OTRA, INCLUIDA EN UN PLANO PERPENDICULAR

Si una recta (r) es perpendicular a un plano α, entonces es ortogonal con toda recta (s), incluida en dicho plano.

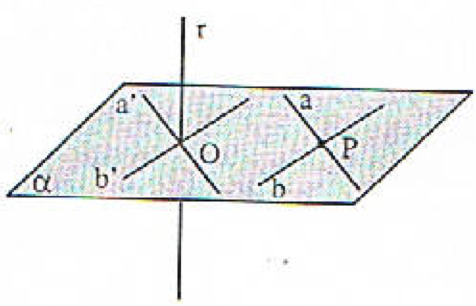
Demostración



Sea $\{O\} = r \cap \alpha$.
Si por O se traza la recta (s') paralela a (s), dicha recta estará incluida en α y pasará por el pie de la perpendicular (r), por lo que será perpendicular a ésta. Entonces se cumplirá por definición, que $r \stackrel{\perp}{-} s$.

7. EJERCICIO TEORICO

Demostrar que si una recta (r), es ortogonal a dos rectas secantes (a) y (b) de un plano α, entonces, la recta es perpendicular al plano.



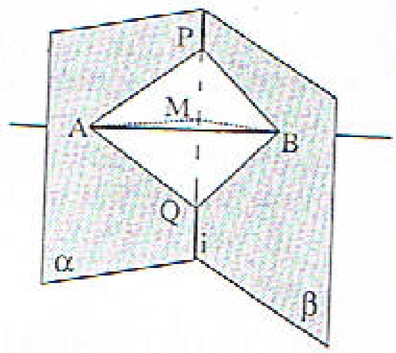
8. EJEMPLO

Se considera un ángulo diedro de caras α y β, y arista (i). Sobre (i), se toman dos puntos P y Q, y se construyen los triángulos isósceles $\widehat{APQ}$ y $\widehat{BPQ}$, con el punto A perteneciente a α, y B perteneciente a β.

Demostrar que las rectas AB e (i), son ortogonales.

Sea M el punto medio de $\overline{PQ}$. Como los triángulos $\widehat{APQ}$ y $\widehat{BPQ}$ son isósceles, se cumplirá que las rectas AM y BM serán mediatrices del segmento $\overline{PQ}$, por lo que $i \perp AM$, e $i \perp BM$.

Considerando que si una recta es perpendicular a dos rectas secantes, entonces es perpendicular al plano que determinan, se puede afirmar que (i), es perpendicular al plano (A,M,B), y como la recta AB está incluida en dicho plano, se concluye que $AB \perp i$.



9. RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO POR UN PUNTO

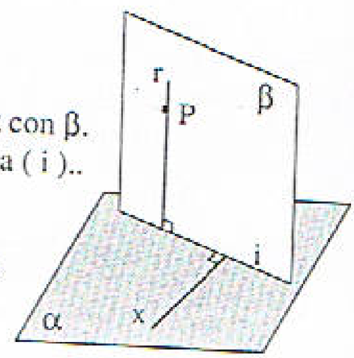
Por un punto P, existe una única recta (r), perpendicular a un plano α.

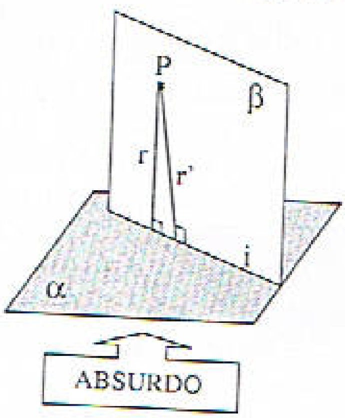
Demostración

Existencia

Sea (x) una recta cualquiera de α ; β el plano perpendicular a (x) por P, e (i), la recta intersección de α con β. En el plano β , se traza la recta (r) , por P, y perpendicular a (i).. Como $x \perp \beta$, y (r) está incluida en dicho plano, entonces $r \perp x$; además $r \perp i$, o sea que $r \perp i$.

Se concluye que, como (r) es ortogonal a dos rectas secantes de α , entonces $r \perp \alpha$



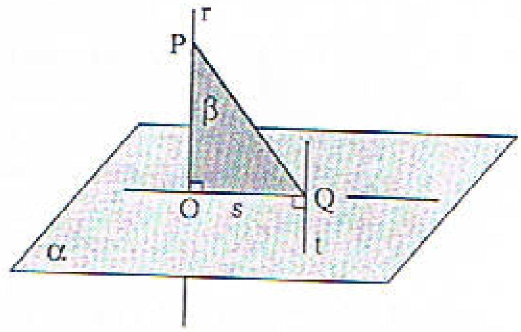


Unicidad

La recta (r), es única, pues si existiera otra recta distinta (r') por P, y perpendicular a α, determinaría con (r) , un plano β. Si $\alpha \cap \beta = i$, existirían en β, dos rectas perpendiculares a (i), por el punto P, lo cual, se demostró en geometría del plano que no es posible, ya que la perpendicular a otra recta por un punto, es única.

10. *TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES*

Si una recta (r), es perpendicular a un plano α, y por su pie O, se traza una perpendicular (s), a una recta (t) cualquiera incluida en el plano ; se cumple que la recta que determinan el punto Q de intersección de (s) con (t), con cualquier punto P de (r), es perpendicular a (t).



Demostración

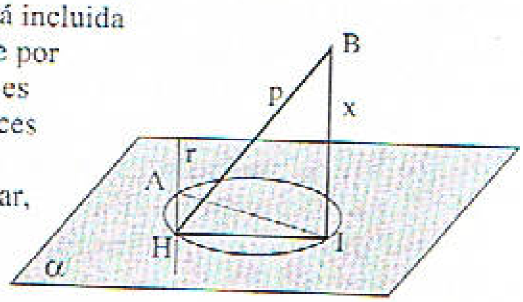
A continuación demostraremos que $PQ \perp t$.
Sea β, el plano determinado, por (r) y (s).
Como $r \perp \alpha$, y la recta (t) está incluida en α, se cumple que $t \perp r$, además como $t \perp s$, entonces $t \perp s$. Si una recta es ortogonal con dos rectas secantes de un plano, entonces es perpendicular al plano, de donde $t \perp \beta$.

Cualquier recta PQ, incluida en β, que pase por el pie de la perpendicular (t), será perpendicular con ella, por lo cual, $PQ \perp t$.

11. EJEMPLO

En un plano α, se consideran un punto A fijo, y por el punto una recta variable (r). Por un punto B, exterior al plano , se traza una recta (p), perpendicular a (r), que la corta en H. Hallar el lugar geométrico del punto H, al variar (r).

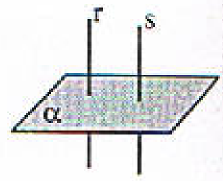
Por B, se considera la recta (x), perpendicular a α, y que corta al plano en I. Como $x \perp \alpha$, y (r) está incluida en el plano, entonces $r \perp x$. También se cumple por hipótesis, que $r \perp p$, por lo que $r \perp p$. Como (r) es ortogonal a dos rectas del plano (B,H,I), entonces (r) será perpendicular a dicho plano.
Considerando que H es el pie de la perpendicular, se cumplirá que $r \perp HI$, y en consecuencia, $\widehat{AHI} = 90°$. Como A e I, son fijos, H varía en la circunferencia de diámetro $\overline{AI}$, incluida en α (lugar geométrico de Thales).



Para demostrar el recíproco, consideremos que todo punto H, de la circunferencia determina con A, la recta (r). Si (x) es la perpendicular a α por B, como $r \perp HI$, (pues $H \in \mathscr{C}_{\overline{AI}}$), aplicando el teorema de las tres perpendiculares, se cumplirá que $BH \perp r$, por lo que se verifican las hipótesis iniciales del problema.

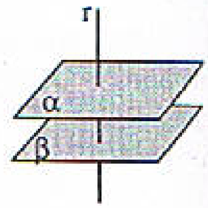
Se concluye entonces que el lugar geométrico del punto H , al variar (r), es la circunferencia de diámetro $\overline{AI}$, incluida en α.

12. EJERCICIOS TEORICOS



1) Demostrar que dos rectas (r) y (s) perpendiculares, a un plano α, son paralelas. Sugerencia :considerar el plano β determinado por (r) y (s), y su intersección con α.

2) Demostrar que si $r \perp \alpha,\ r \parallel s \Rightarrow s \perp \alpha$.

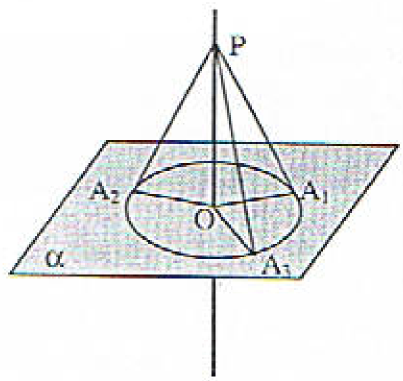


3) Demostrar que dos planos α y β perpendiculares a una recta (r), son paralelos. Sugerencia : demostrar por absurdo.

4) Demostrar que si $\alpha \perp r,\ \alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \perp r$

13. LUGAR GEOMETRICO DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO, QUE EQUIDISTAN DE LOS PUNTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

El lugar geométrico de los puntos del espacio, que equidistan de los puntos de una circunferencia, es la recta (p), perpendicular al plano de la circunferencia, por su centro.



Demostración

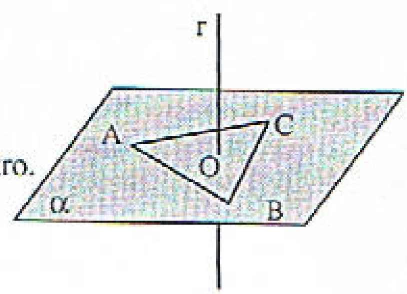
Se demostrará n primer lugar que si $P \in p \Rightarrow \forall A_i \in \mathscr{C},\ \overline{PA_i} = k$ (constante)

Obsérvese que para todos los puntos A_i, de la circunferencia, se cumplirá que los triángulos $\widehat{POA_i}$ resultan congruentes pues $\overline{PO}$ es común , $\overline{OA_i} = r$ (radio), y $\widehat{POA_i} = 90°$, de donde aplicando el criterio L.A.L. , se deduce la congruencia de los triángulos y en particular la de sus lados $\overline{PA_i}$

Así mismo se cumplirá que si $\forall A_i \in \mathscr{C},\ \overline{PA_i} = k \Rightarrow P \in p$

Sea (p'), la perpendicular a α por P, y O' su intersección con el plano. Los triángulos $\widehat{PO'A_i}$ resultan congruentes pues $\overline{PO'}$ es lado común, $\overline{PA_i} = k$ y $\widehat{PO'A_i} = 90°$, (criterio L.L.A.), por lo cual se deduce que los lados $\overline{O'A_i}$, tienen medida constante, y como el único punto del plano α que equidista de los puntos de la circunferencia $\mathscr{C}$, es su centro, se concluye que O' = O, p' = p, y en consecuencia $P \in p$, como se quería probar.

Corolario



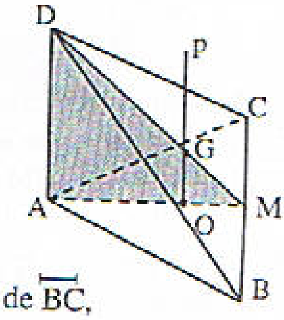
El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los vértices de un triángulo, es la recta perpendicular al plano del triángulo, por su circuncentro.

El enunciado anterior , puede generalizarse para cualquier polígono inscriptible en una circunferencia.

13.1 EJEMPLO

Se considera un tetraedro ABCD con $\widehat{ABC}$ equilátero, de lado de longitud x, $\overline{AD} = x$, y AD perpendicular a AC y a AB.
Hallar el punto de la cara $\widehat{BCD}$ que equidiste de los vértices del $\widehat{ABC}$.

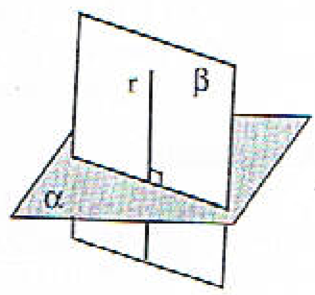
El lugar geométrico de los puntos de los puntos del espacio que equidistan de los vértices del $\widehat{ABC}$, es la recta perpendicular (p), al plano del triángulo por su circuncentro. Obsérvese que dicha recta es paralela a AD, pues AD es perpendicular a α.
Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, dicho punto pertenece al mismo plano que las paralelas AD y (p).
Sea $\{G\} = p \cap DM$. Como el triángulo $\widehat{BCD}$ es isósceles, ($\overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{2}\,.x$), entonces en el plano de la cara BCD, el punto buscado estará sobre la mediatriz de $\overline{BC}$, o sea sobre la recta DM. Dicho punto es G.



Finalmente, por Thales, se deduce que G , es el baricentro del triángulo $\widehat{BCD}$, pues pertenece a la mediana $\overline{DM}$ y cumple que $\dfrac{MO}{MA} = \dfrac{MG}{MD} = \dfrac{1}{3}$

14. PLANOS PERPENDICULARES

Definición
Dos planos son perpendiculares, si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.



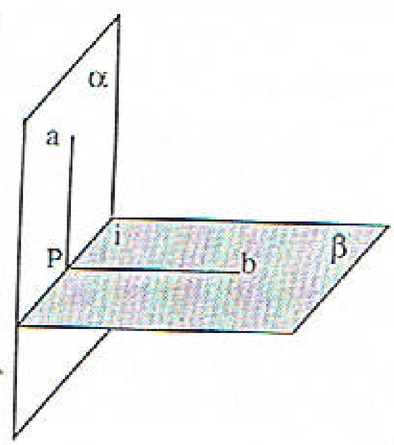
15. CARACTER RECIPROCO DE LA PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS

Si un plano α, contiene una recta perpendicular a otro β, entonces β contiene una recta perpendicular a α.

<u>Demostración</u>

Sea $\{P\} = a \cap \beta$.

Como los planos α y β tienen un punto en común P; tienen como intersección una recta (i) que pasa por P.
En el plano β, se considera la recta (b) , perpendicular a (i) por P. Por ser $a \perp \beta$, se cumplirá que $b \perp a$, y además $b \perp i$, por lo que, (b) será perpendicular al plano que determinan (a) e (i), o sea $b \perp \alpha$.

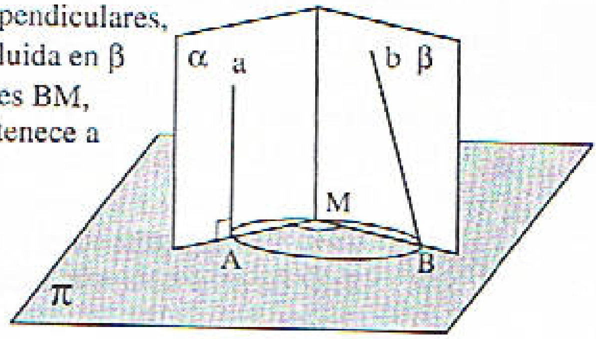


Corolario : $\alpha \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

16. EJEMPLO

Se considera un plano π, una circunferencia de diámetro $\overleftrightarrow{AB}$, incluida en él , y por el punto A, una recta (a) perpendicular al plano. Por B se considera una recta (b), no coplanaria con (a) y secante con π. Sea M un punto de la circunferencia distinto de A y B, y los planos $\alpha = (a, M)$ y $\beta = (b, M)$.

Demostrar que α y β, son perpendiculares.

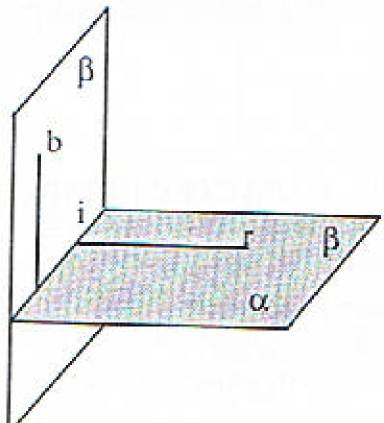


Para demostrar que los planos son perpendiculares, se demostrará que existe una recta incluida en β que es perpendicular a α. Dicha recta es BM, pues cumple que, $BM \perp AM$, (M pertenece a la circunferencia de diámetro AB), y $BM \perp a$, pues $a \perp \pi$, y $BM \subset \pi$. Entonces si la recta BM es ortogonal , con dos rectas secantes AM y (a), se cumplirá que es perpendicular al plano que ellas determinan, o sea α.
Resumiendo, la recta BM, está incluida en β y es perpendicular a α, por lo que $\alpha \perp \beta$.

17. RECTA INCLUIDA EN UN PLANO PERPENDICULAR A OTRO

Si dos planos α y β son perpendiculares,toda recta (r) incluida en uno de ellos, y perpendicular a su intersección (i), es perpendicular al otro plano.

Demostración

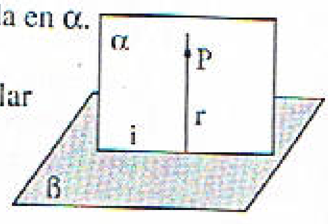


Como $\alpha \perp \beta$, existe una recta (b) incluida en β y perpendicular a α. Como (r) está incluida en α, entonces es ortogonal con (b). Además $r \perp i$.
Resumiendo, (r) es ortogonal a dos rectas secantes (b) e (i), por lo cual es perpendicular al plano β que ellas determinan .

Corolario

Si dos planos α y β son perpendiculares, la perpendicular (r) trazada por un punto de α, a β,esta incluida en α.

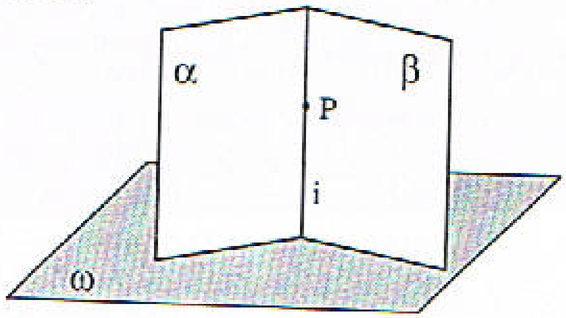
Demostración



Sea $\alpha \cap \beta = i$. En el plano α, si se traza la perpendicular a (i) por P, dicha recta será perpendicular a β, por ser perpendicular a la intersección (i),. Como la perpendicular a un plano por un punto del espacio es única, la recta mencionada debe ser (r), secante con (i), y por lo tanto incluida en (r).

18.- PLANO PERPENDICULAR A LA INTERSECCION DE DOS PLANOS

Si un plano ω, es perpendicular a dos planos α y β secantes ,entonces es perpendicular a su intersección (i).



Demostración

Sea $P \in i$. Si por P, se considera la perpendicular a ω, esta recta resulta contenida en α y también en β, (corolario anterior), por lo que dicha recta coincide con la intersección de α y β , o sea (i), de donde, $\omega \perp i$.

18.1 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que si un plano es perpendicular a la intersección de otros dos, entonces es perpendicular a cada uno de ellos.

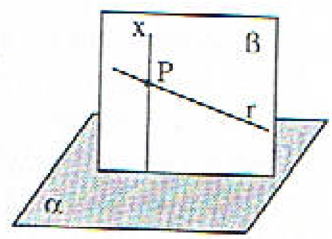
19. PLANO PERPENDICULAR A OTRO QUE CONTIENE UNA RECTA

Para toda recta (r), no perpendicular a un plano α, existe y es único el plano β que la contiene, y es perpendicular al primero.

Demostración

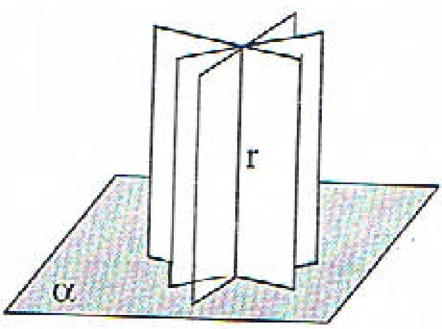
Existencia

Para probar la existencia del plano β, basta trazar por un punto P cualquiera de (r), la recta (x) perpendicular a α por P. El plano determinado por (r) y (x),será perpendicular a α.



Unicidad

El plano β, es único pues si existiera otro plano β', perpendicular a α, se cumpliría que la recta (x), debería estar incluida en β y en β', pero como las rectas (r) y (x) determinan un único plano, entonces $\beta = \beta'$.



Observación

Si la recta (r) es perpendicular al plano α, existen infinitos planos que la contienen, y son perpendiculares a α.

20. EJEMPLO

Se considera un cubo ABCDEFGH. Sean los planos $\alpha = (B,D,E)$ y $\beta = (A,G,C)$. Sean M punto medio de $\overline{BD}$, I la intersección de $\overline{AG}$ con α, y P un punto de la diagonal $\overline{AG}$, tal que $\overline{AP} = 2/3\ \overline{AG}$. Demostrar que :

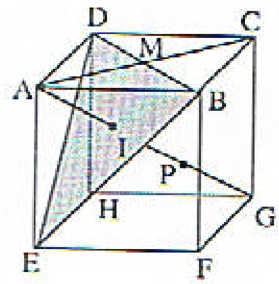
a) $BD \perp AG$, $BE \perp AG$, y $DE \perp AG$

b) la recta AG es perpendicular a α

c) los planos α y β son perpendiculares

d) α es el plano mediatriz de $\overline{AP}$

a) Se demostrará a continuación que $BD \perp AG$.
Como CG es perpendicular al plano que contiene la cara ABCD, se cumplirá que es ortogonal con cualquier recta de dicho plano, por lo que $CG \perp BD$. Además $BD \perp AC$, entonces la recta BD es ortogonal a dos rectas del plano $\beta = (A,G,C)$, por lo cual es perpendicular a dicho plano y en consecuencia ortogonal con cualquier recta incluida en él, en particular $BD \perp AG$, como se quería probar.
Razonando en forma similar pruebe el lector, los restantes casos.

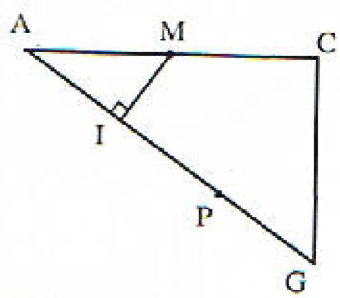


b) Como AG, es ortogonal a las rectas secantes BD, BE y DE, entonces es perpendicular al plano α, en las cuales están incluidas las anteriores.

c) Como $AG \perp \alpha$, y AG está incluida en β, por definición se cumple que $\alpha \perp \beta$.

d) Se demostrará que I es punto medio de $\overline{AP}$.
Si a es la medida de la arista del cubo se tiene que $\overline{CG} = a$ $\quad \overline{AC} = \sqrt{2}.a$ (diagonal del cuadrado ABCD), y por Pitágoras $\overline{AG} = \sqrt{3}.a$.
Como los triángulos $A\hat{C}G$ y $A\hat{M}I$ son semejantes; por tener dos ángulos congruentes; $C\hat{A}G = M\hat{A}I$ (común) y $A\hat{C}G = A\hat{I}M$ (90°), se cumple la proporcionalidad de sus lados $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AI}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{AC}}$

de donde $\overline{AI} = \dfrac{\overline{AM}.\overline{AC}}{\overline{AG}}$, o sea que



$$\overline{AI} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}.a)(\sqrt{2}.a)}{\sqrt{3}.a}$$, por lo cual $\overline{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.a$,

entonces $\overline{AI} = \dfrac{1}{3}\overline{AG}$ y como $\overline{AP} = \dfrac{2}{3}\overline{AG}$, se concluye que $\overline{AI} = \overline{AP}$.

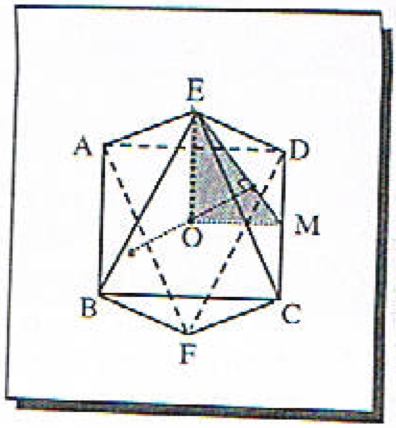
Resumiendo, α es el plano perpendicular a $\overline{AP}$ en su punto medio I, por lo cual es su plano mediatriz.

21. EJERCICIOS

1) Se considera un tetraedro regular ABCD. Demostrar que AB y CD son ortogonales.
2) Dadas dos rectas que se cruzan (a) y (b) y un punto P exterior, hallar una recta (r) tal que sea ortogonal con (a) y (b) y pase por P.
3) Se consideran dos planos secantes α y β.
Sean $A \in \alpha$, $B \in \beta$ y $\alpha \cap \beta = i$. Hallar un punto $P \in i$ tal que $\widehat{APB} = 90^\circ$.
4) Sea un plano α y un cuadrado ABCD de centro O incluido en α. Por A se traza la recta (r), $r \perp \alpha$. Sea un punto $V \in r$. Probar que $VO \perp BD$.
5) Se considera un plano α y una recta (t), $t \subset \alpha$. Por un punto $A \in t$ se traza la recta (r), , $r \perp t$, (r) no incluida en α ni perpendicular a el plano. Se construye en α, una cfa. $\mathscr{C}$, tangente a (t) en A cuyo centro es O. En el plano β, $\beta=(OA,r)$ se traza por O la recta (p), $p \perp OA$, $p \cap r = \{B\}$. Probar que $BO \perp \alpha$.
6) Dados tres puntos A,B,C y un plano α que no contiene a los puntos, hallar un punto I que equidiste de A,B,C y pertenezca a α.
7) Dado un plano α y un punto $A \notin \alpha$, hallar el lugar geométrico de los puntos P tal que $P \in \alpha$ y $AP = k$ siendo k una medida dada.
8) Sean una recta (r) y un punto exterior A.
Se consideran los planos α variables tal que $r \subset \alpha$. Por A se traza la recta (p) $p \perp \alpha$ y $p \cap \alpha = \{H\}$.
Hallar el lugar geométrico de H.
9) Sea (ABCDEFGH) un cubo de arista a y $\overline{AG}$ diagonal de cubo. Sea O el punto medio de $\overline{AG}$ y sean R,S,T,U,V,W puntos medios de las aristas $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FB}$, que no concurren a los vértices A y G.
   a) Probar que dichos puntos pertenecen al plano mediatriz de $\overline{AG}$.
   b) Probar que (R,S,T,U,V,W) es un hexágono regular.
10) Se considera un plano π y una cfa. $\mathscr{C}$ incluida en él, de diámetro $\overline{AB}$. Sean $SA \perp \pi$ y $\overline{SA} = \overline{AB}$; $C \in \mathscr{C}$, $C \neq A$, $C \neq B$ y $H \in SC$ tal que $AH \perp SC$.
   a) Demostrar que SCB es triángulo rectángulo.
   b) Dados $\alpha=(A,S,C)$ y $\beta=(B,S,C)$, demostrar que $\alpha \perp \beta$.
   c) Demostrar que la recta AH es ortogonal con SB.
   d) Lugar geométrico de las rectas AH cuando C varía en la circunferencia $\mathscr{C}$.
   e) Lugar geométrico del punto H.
11) Dado un tetraedro regular ABCD y M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, probar que la recta MN es perpendicular común a AB y CD.

CAPITULO 16

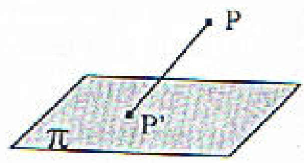
PROYECCIONES DISTANCIAS Y ANGULOS



1. PROYECCIONES

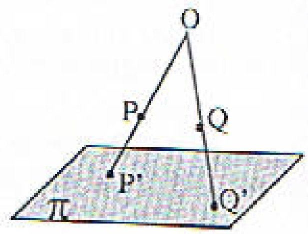
1.1. PROYECCION DE UN PUNTO

Se define proyección de un punto, sobre un plano, (plano de proyección), al punto de intersección del plano con una recta, (llamada proyectante) que pasa por el punto y cumple con una segunda condición según el método de proyección elegido.

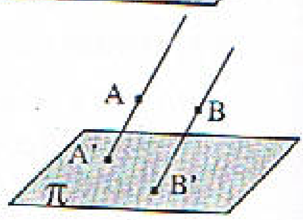


Las proyecciones de un punto sobre un plano pueden ser cónicas o paralelas, y dentro de las proyecciones paralelas se pueden distinguir proyecciones oblicuas u ortogonales.

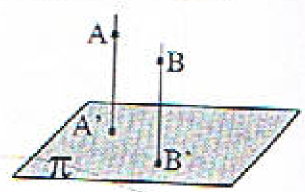
- En las proyecciones cónicas todas las rectas de proyección pasan por un punto exterior al plano llamado centro de proyección.



- En las proyecciones paralelas todas las rectas proyectantes tienen la misma dirección, o sea que son paralelas.



- En las proyecciones paralelas ortogonales las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección (en caso contrario son oblicuas).



Observación

En lo sucesivo se trabajará con proyecciones paralelas ortogonales, refiriéndonos a ellas como simplemente, proyecciones.

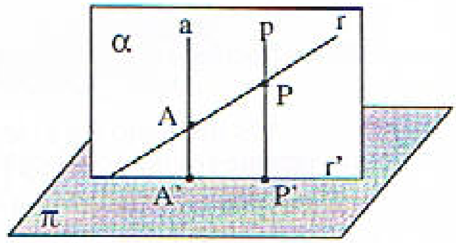
1.2. PROYECCION DE UNA RECTA

La proyección de una recta (r) no perpendicular a un plano de proyección π es otra recta (r').

Demostración

Sea un punto A cualquiera perteneciente a (r). Por A se considera la recta proyectante (a) que corta al plano de proyección π en A'.

Las rectas (r) y (a) determinan un plano α (llamado plano proyectante de la recta).



Sea $\alpha \cap \pi = r'$

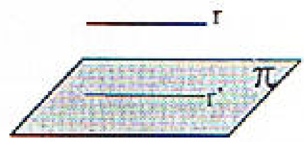
Todo punto P de la recta (r) tendrá su proyección sobre (r'), pues si por P se traza la recta proyectante (p), al ser esta recta paralela a (a), debe estar contenida en α y por lo tanto su intersección, P', con el plano π debe estar incluida en la intersección de ambos planos, vale decir $P' \in r$.

- Si la recta es perpendicular al plano, su proyección sobre este, es un punto.

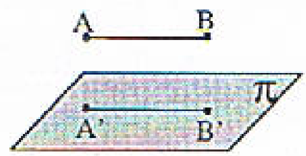
1.3 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que si una recta (r) es paralela a un plano de proyección π, su proyección es una recta (r'), paralela a ella.

Sugerencia: Considerar el plano proyectante α y su intersección con π.



2) Demostrar que si un segmento de recta, $\overline{AB}$, esta incluido en una recta paralela a un plano, su proyección sobre éste, es un segmento $\overline{A'B'}$ congruente y paralelo con el primero.



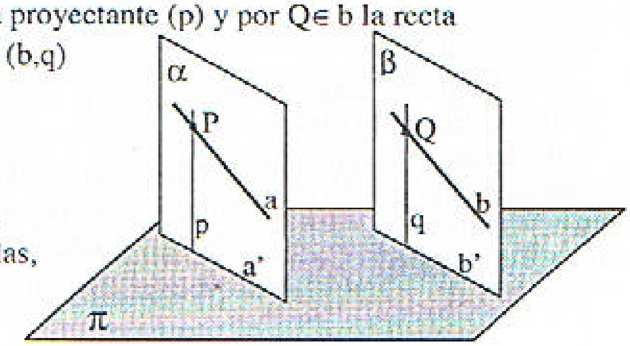
1.4 PROYECCIONES DE RECTAS PARALELAS

Si dos rectas (a) y (b) son paralelas, y no perpendiculares a un plano de proyección π, sus proyecciones (a') y (b') son rectas paralelas.

Demostración

Por un punto $P \in a$ se considera la recta proyectante (p) y por $Q \in b$ la recta proyectante (q). Sean $\alpha = (a,p)$ y $\beta = (b,q)$ los planos proyectantes de (a) y (b), y (a') y (b') sus intersecciones con π.

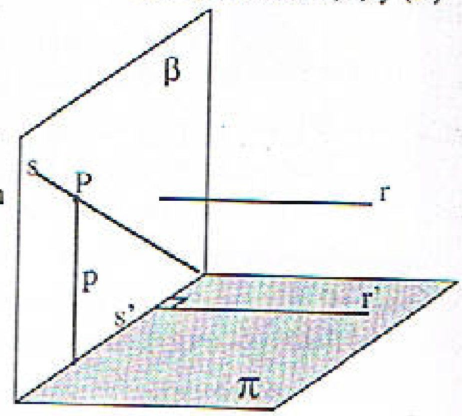
Como $\alpha \parallel$ p (pues , $a \parallel b$ y $p \parallel q$) y considerando que dos planos paralelos cortan a un tercero según rectas paralelas, se cumplirá entonces que $a' \parallel b'$, como se quería demostrar.



1.5 PROYECCIONES DE RECTAS ORTOGONALES

Si dos rectas (r) y (s), son ortogonales, y una de ellas es paralela al plano de proyección, y la otra no es perpendicular a éste, entonces sus proyecciones (r') y (s') son perpendiculares.

Demostración



Por un punto $P \in s$, se considera la recta proyectante (p), que junto a la recta (s), determinan el plano proyectante β.

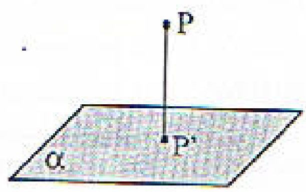
Como $p \perp \pi$, y (r') está incluida en dicho plano, se cumplirá que $r' \perp p$.

Además como $r \perp s$, y $r \parallel r'$, se verifica que $r' \perp s$, entonces (r') es ortogonal con dos rectas secantes del plano β, por lo que $r' \perp \beta$. Como (s') está incluida en β y pasa por el pie de la perpendicular, entonces será perpendicular a (r'), como se quería demostrar.

2. DISTANCIAS

2.1 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Se denomina distancia de un punto P a un plano α, a la distancia entre dicho punto y su proyección ortogonal P', sobre el plano.

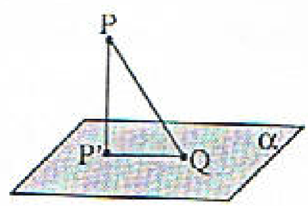


$$\boxed{d(P,\alpha) = \overline{PP'}}$$

2.2 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO COMO MEDIDA MINIMA

La distancia entre un punto P, a un plano α, es menor que cualquier otra distancia entre dicho punto y otro punto Q cualquiera del plano, distinto de su proyección P'.

Demostración

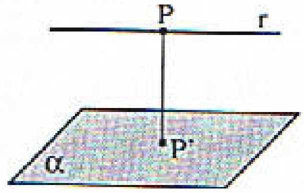


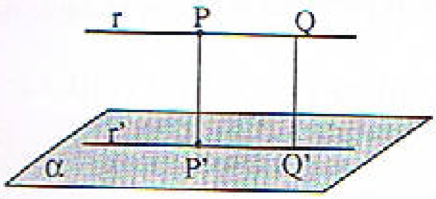
Como $PP' \perp \alpha$, se cumple que $PP' \perp QP'$, de donde, el triángulo PP'Q, es rectángulo.

Considerando que en todo triángulo rectángulo, la medida de los catetos es menor que la de hipotenusa, se puede afirmar que $\overline{PP'} < \overline{PQ}$, que era lo que se quería demostrar.

2.3 DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO PARALELO

Se define distancia entre una recta (r) y un plano paralelo α, a la distancia entre un punto P cualquiera de la recta, y el plano.



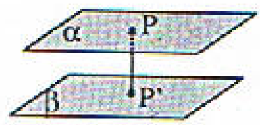


La distancia entre el punto y el plano es independiente del punto elegido, pues si se toma otro punto Q, su proyección Q', determinará un segmento $\overline{QQ'}$, de medida igual a $\overline{PP'}$,ya que el cuadrilátero PQQ'P' resulta rectángulo.

2.4 DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Se denomina distancia entre dos planos paralelos, a la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$$\boxed{d(\alpha, \beta) = d(P,\beta) = \overline{PP'}}$$

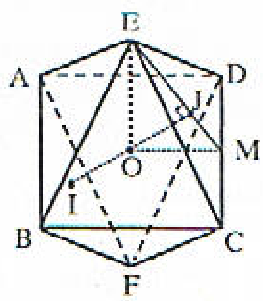


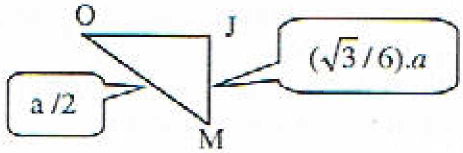
- Al igual que en la definición anterior, la distancia entre los planos es independiente del punto elegido

2.5 EJEMPLO

Considerando que el centro O, de todo octaedro regular, equidista de los vértices del mismo, y que las caras opuestas, están situadas en planos paralelos, hallar la distancia entre los planos $\alpha = (A,B,F)$ y $\beta = (C,D,E)$, en función de la arista a ,del octaedro regular ABCDEF de la figura.

Sean I y J, los centros de los triángulos $\widehat{ABF}$ y $\widehat{CDE}$, y M el punto medio de $\overline{CD}$. Como O equidista de A, B y F, dicho punto se encuentra sobre la recta perpendicular a α, por I. De igual manera O, se encontrará en la perpendicular a β por J. Como los planos son paralelos, la perpendicular a ellos por O, será única, de donde resulta que O es el punto medio de $\overline{IJ}$, e $\overline{IJ}$ es la distancia entre los planos paralelos.



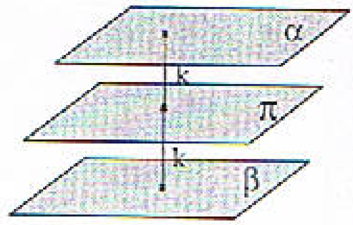


Se calculará $\overline{OJ}$ en el triángulo rectángulo OJM, del cual se conocen la medida de la hipotenusa $\overline{OM} = a/2$, y la medida $\overline{JM}$, como se explicará a continuación.

Como J es el baricentro del triángulo equilátero $\widehat{CDE}$, se cumplirá que $\overline{JM} = 1/3\ \overline{EM}$. A su vez , como $\overleftrightarrow{EM}$ es la altura del triángulo, ésta medirá $(\sqrt{3}/2).a$, por lo cual resulta que $\overline{JM} = (\sqrt{3}/6).a$. Si se aplica el teorema de Pitágoras, en el triángulo $\widehat{OJM}$, se obtiene que $\overline{OJ} = \sqrt{(a/2)^2 - ((\sqrt{3}/6).a)^2}$, y efectuando operaciones se llega a que que $\overline{OJ} = (\sqrt{6}/6).a$.

Se concluye que la distancia entre los planos paralelos α y β, es el doble de $\overline{OJ}$, o sea que : $d(\alpha,\beta) = (\sqrt{6}/3).a$

2.6 EJERCICIO TEORICO



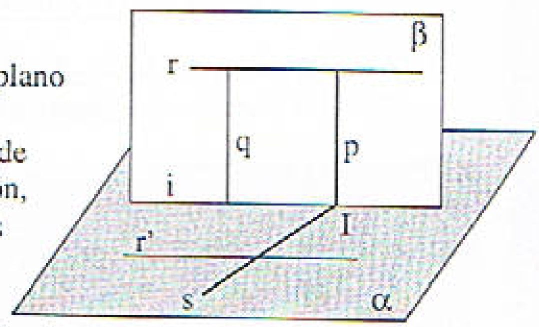
Probar que el lugar geométrico de los puntos del espacio, que distan una medida **k**, de un plano π, es la unión de dos planos paralelos α y β, situados en diferente semiespacio respecto de π, a la distancia k.

2.7 PERPENDICULAR COMUN ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Para todo par de rectas (r) y (s) que se cruzan, existe y es única la recta perpendicular (p), a ambas.

Demostración

Existencia



En primer lugar se considera el único plano α, que contiene a (s) y es paralelo a (r). Para determinarlo basta trazar por cualquier punto de (s), una recta (r') paralela a (r) . A continuación, se considera el plano β que contiene a (r), y es perpendicular a α. Para determinarlo, por un punto cualquiera de (r), se traza una perpendicular (q) a α. Sean $\alpha \cap \beta = i$, y $s \cap i = \{ I \}$. El punto I , siempre existe, pues (i) y (s), no pueden ser paralelas, ya que (r) y (s) no lo son. En el plano β, existe y es única la perpendicular a (r) por I. Dicha recta es (p), que también es perpendicular a (i) pues (r) e (i) son paralelas. Como (p) es ortogonal a dos rectas del plano α, ($p \perp i$ y además $p \perp r'$ ya que r' es paralela a (r) y (p) es perpendicular a (r)), entonces (p) será perpendicular al plano α, y en consecuencia a la recta (s) incluida en α y que pasa por su pie.

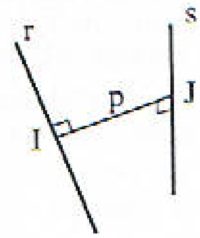
Unicidad: la perpendicular común (p), cumple las siguientes condiciones :

- Es perpendicular al plano α. Dicho plano α **es único**.
- Está incluida en el plano β, plano que incluye a todas las perpendiculares trazadas desde puntos de la recta (r) a α. Dicho plano β **es único.**
- Corta a la recta (s). Se observa que el **único punto** en común, entre β y (s) es I. Se concluye entonces que la única recta perpendicular a α, que está incluida en β, contiene a I, y es perpendicular a (r),es la recta (p).

2.8 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

Se denomina distancia entre dos rectas cruzadas a la medida del segmento determinado por los puntos de corte de ambas rectas con su perpendicular común.

$$\boxed{d(r, s) = \overline{IJ}}$$

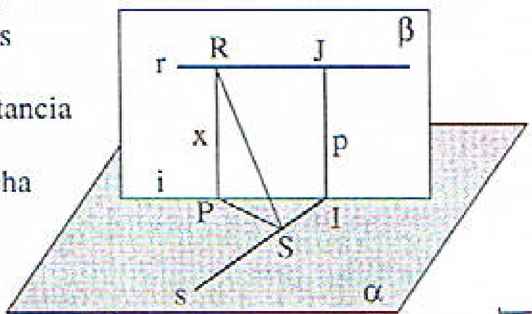


2.9 DISTANCIA ENTRE RECTAS CRUZADAS COMO LONGITUD MINIMA

La distancia entre dos rectas cruzadas (r) y (s), es menor que cualquier otra distancia determinada por dos puntos cualesquiera situados respectivamente en una y otra recta.

Demostración

Sean las rectas (r) y (s) en las mismas condiciones del teorema anterior, y R y S, dos puntos cualesquiera de ellas.
Se demostrará que $\overline{IJ} < \overline{RS}$, siendo $\overline{IJ}$, la distancia entre las rectas cruzadas.
Si por R se traza la perpendicular (x) a α, dicha recta está incluida en β. Sea $x \cap i = \{P\}$
Como $r \parallel i$ y $x \parallel p$, entonces PRJI, es paralelogramo y $\overline{PR} = \overline{IJ}$. Además como $x \perp PS$, el triángulo $\widehat{PRS}$ es rectángulo, y su cateto $\overline{PR}$, es menor que la hipotenusa $\overline{RS}$.



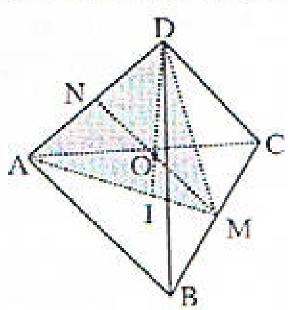
Resumiendo, $\overline{PR} = \overline{IJ}$ y $PR < RS$, de donde se concluye que $\overline{IJ} < \overline{RS}$

2.10 EJEMPLO

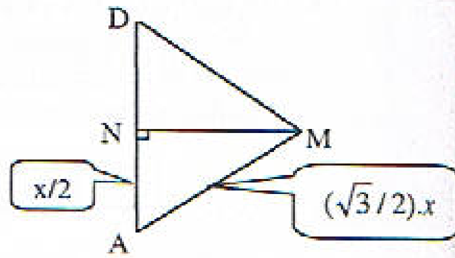
Se considera el tetraedro regular ABCD, cuya arista mide x. Sean M y N puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, el punto I centro del triángulo ABC, y el plano $\alpha = (A,B,C)$.

a) Probar que la recta DI, es perpendicular al plano α, y que M pertenece al plano (A,D,I)
b) Probar que MN es la perpendicular común entre las rectas cruzadas BC y AD, y hallar la distancia entre dichas rectas
c) Sea O el punto de corte entre las rectas MN y DI. Hallar la distancia del punto O al plano α

a) El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los vértices de un triángulo, es una recta perpendicular al plano del triángulo por su circuncentro, y como $DA = DB = DC$, entonces $DI \perp \alpha$.
En el triángulo $\widehat{ABC}$, $\overline{AM}$ es mediana, e I su baricentro, por lo que M pertenece a la recta AI, y en consecuencia al plano determinado por (A,D,I).



b) El triángulo $\widehat{ADM}$ es isósceles, pues $\overline{DM}$ y $\overline{AM}$ son alturas de cara iguales. Como N es punto medio de $\overline{AD}$, se cumple que $NM \perp AD$. Además $NM \perp BC$, ya que $BC \perp AM$ y $BC \perp DM$, por lo que BC será perpendicular al plano (A,D,M) y en consecuencia a la recta NM que pasa por su pie. Entonces la distancia $\overline{MN}$ será la distancia entre las rectas cruzadas BC y AD;

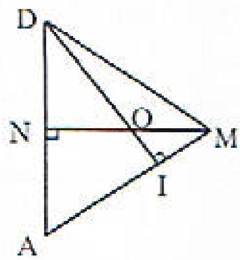


que es posible calcular por Pitágoras en el triángulo rectángulo $\widehat{ANM}$, en que $\overline{AN}=\frac{x}{2}$ y $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}.x$, resultando $\overline{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

c) La distancia del punto O al plano α es $\overline{OI}$. Para hallar dicha distancia, construyamos el triángulo ADM y ubiquemos en él, los puntos I, O y N.
Es posible calcular $\overline{OI}$ usando los triángulos semejantes OIM y ANM pues $\widehat{ANM}=\widehat{OIM}$ (90°) y el ángulo $\widehat{M}$ es común.
Entonces se cumple la proporcionalidad de los lados

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{IM}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}} \Rightarrow \overline{OI}=\frac{\overline{AN}.\overline{IM}}{\overline{MN}}.$$

Considerando que $\overline{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\overline{AN}=\frac{x}{2}$, e $\overline{IM}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$ ($\overline{IM}$ es un tercio de la medida de $\overline{AM}$, por ser I baricentro y $\overline{AM}$ mediana) y operando se obtiene que $\overline{OI}=\frac{\sqrt{6}}{12}.x$.

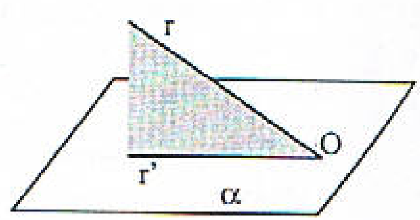


3. ANGULOS

3.1. ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Si una recta no es perpendicular, ni paralela a un plano, se denomina ángulo entre la recta y el plano, al ángulo agudo determinado por la recta y su proyección ortogonal sobre el plano; incluido en cualquiera de los dos semiespacios que el plano determina.

- Notación: $\widehat{r,\alpha}=r\widehat{O}r'$ siendo $\{O\}=r\cap\alpha$ y (r') la proyección ortogonal de (r) sobre α.
- Si la recta es perpendicular al plano, se dice que forma ángulo recto con él.
- Si la recta es paralela al plano, se dice que forma ángulo nulo con él.



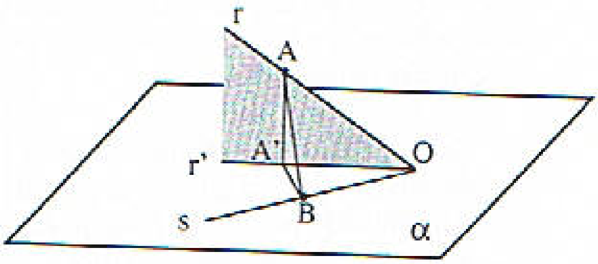
3.2. ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO COMO ANGULO MINIMO

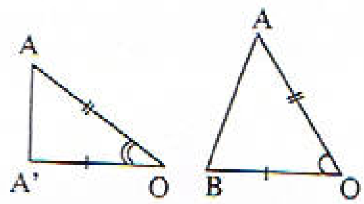
El ángulo entre una recta (r) y un plano α es menor que cualquier otro de los ángulos formados por la recta, con las semirrectas que tienen como origen el punto de intersección de la recta con el plano y están incluidos en él.

Demostración

Se demostrará que $\widehat{rOr'} < \widehat{rOs}$ siendo (r') la proyección de (r) sobre α y $\overline{Os}$ una semirrecta cualquiera incluida en α.

Sea un punto A cualquiera, $A \in r$ y A' su proyección sobre α, ($A' \in r'$). Sobre la semirrecta Os, incluida en α, se toma un punto B tal que $\overline{OB} = \overline{OA'}$. Como $AA' \perp \alpha$, entonces $AA' \perp A'B$, por lo que en el triángulo rectángulo $AA'B$ se cumple que el cateto es menor que la hipotenusa, o sea $AA' < AB$. Los triángulos $\widehat{OAA'}$ y $\widehat{OAB}$ tienen dos lados congruentes ($\overline{OA}$ común y $\overline{OB} = \overline{OA'}$) y el tercer lado desigual. Como el lado $\overline{AA'}$ es menor que el lado $\overline{AB}$ se verificará la misma desigualdad entre sus ángulos opuestos, o sea $\widehat{AOA'} < \widehat{AOB}$, de donde se deduce la tesis $r\widehat{O}r' < r\widehat{O}s$.

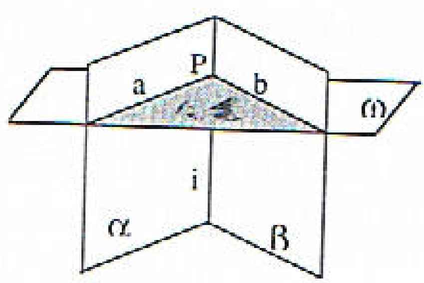




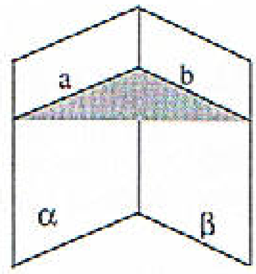
3.3. SECCION RECTA O RECTILINEO DE UN DIEDRO

Dado un diedro de caras α y β, y un plano ω perpendicular a su arista (i) llamamos sección recta o rectilíneo del diedro al ángulo determinado por la intersección del plano con el diedro.

- Si $\omega \perp i$, $\omega \cap \alpha = a$, $\omega \cap \beta = b$, y $a \cap b = \{P\}$, se afirma que el rectilíneo del diedro $\widehat{\alpha,\beta}$ es el ángulo $a\widehat{P}b$.
- Como $\omega \perp i$, se verifica que las rectas (a) y (b) son perpendiculares a (i); por lo que, si se traza por el punto P, rectas perpendiculares a ella, incluidas en las caras del diedro; éstas determinan un rectilíneo del diedro.



3.4 ANGULO ENTRE DOS PLANOS SECANTES

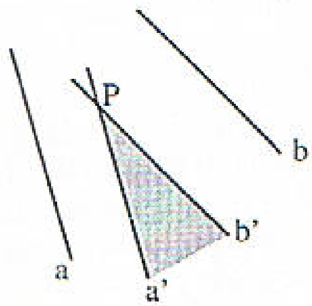


Se denomina ángulo entre dos planos secantes α y β, no perpendiculares, al rectilíneo agudo de uno de los diedros determinados por ellos , $\widehat{a,b}$.

- Si los planos son perpendiculares, se dice que forman ángulo recto.

3.5 ANGULO ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

Se define ángulo entre dos rectas cruzadas, no ortogonales, al ángulo agudo determinado por las paralelas a ellas, por un punto P, cualquiera del espacio.



- Si (a) y (b), son las rectas cruzadas y (a') y (b') sus paralelas por P, el ángulo entre ellas queda determinado por a'P b' (cualquiera de los dos ángulos opuestos por el vértice.
- Cualquiera que sea el punto P elegido, se obtienen ángulos congruentes.
- Si las rectas cruzadas son ortogonales, se afirma que forman ángulo recto.

3.6 EJEMPLO

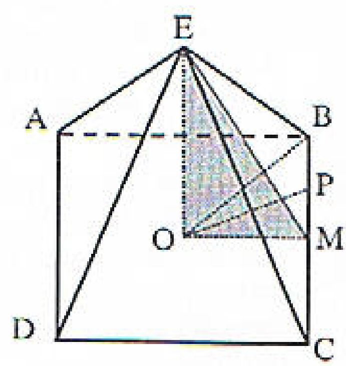
Se considera una pirámide regular ABCDE, de base cuadrada, tal que la medida de todas sus aristas es x .Se consideran M, punto medio de $\overline{BC}$ y P punto medio de $\overline{BM}$.

Sean los planos $\alpha = (A,B,C)$ y $\beta = (B,C,E)$

a) Construir y calcular un rectilíneo del diedro de caras α y β.

b) Construir y calcular el ángulo que forma la recta EP con el plano α .

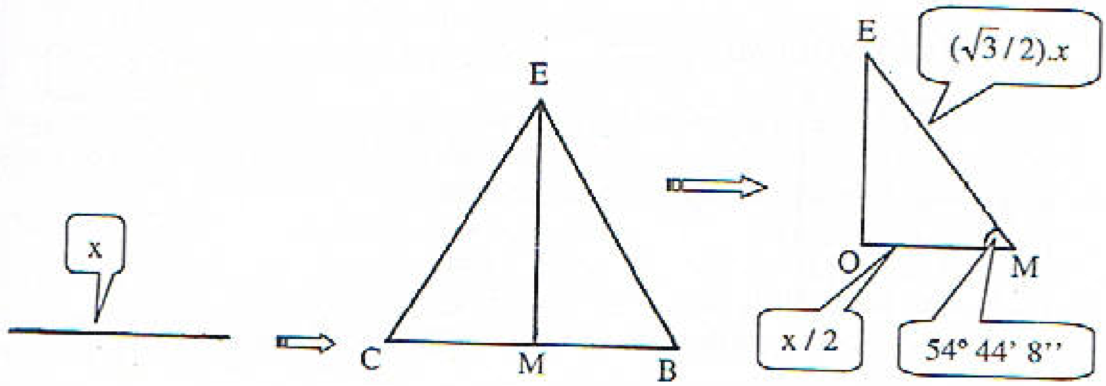
c) Construir y calcular el ángulo entre las rectas que se cruzan, EP y AD.



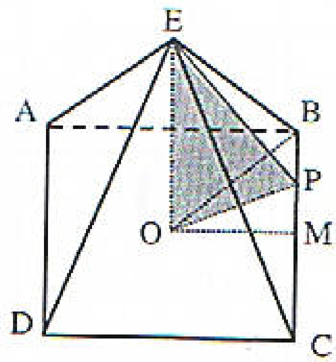
a) Un rectilíneo del diedro de caras α y β, está determinado por el ángulo $\widehat{EMO}$, pues el plano determinado por estos puntos , es perpendicular a la arista BC del diedro, ya que $EM \perp BC$ y $OM \perp BC$. Se construirá, el triángulo rectángulo EOM. El cateto OM, mide x / 2, y $\overline{EM}$ es altura del triángulo equilátero $\widehat{BCE}$, por lo que mide $(\sqrt{3}/2).x$ Para calcular $\widehat{EMO}$, se aplicará la fórmula de coseno,

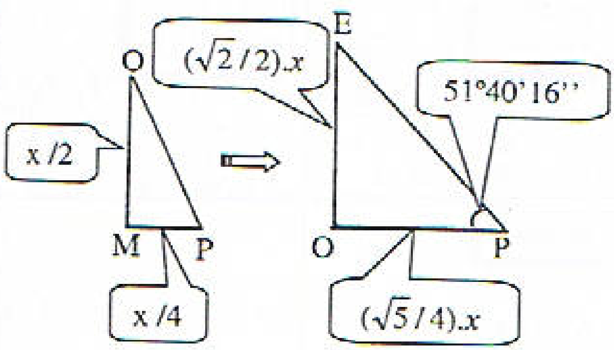
$$\cos(E\widehat{M}O) = \frac{\overline{OM}}{\overline{EM}} \Rightarrow \cos(E\widehat{M}O) = \frac{x/2}{(\sqrt{3}/2).x} \Rightarrow \cos(E\widehat{M}O) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \widehat{EMO} = 54°44'8''$. A continuación se efectúa la construcción del ángulo pedido. Para la **construcción**, cada segmento debe transportarse de la figura anterior, como se detalla en la figura siguiente, por lo cual a partir de un segmento de medida **x**, se construye el triángulo equilátero $\widehat{BCE}$, del cual se halla su altura $\overline{EM}$, la que posteriormente se transporta para la construcción del triángulo $\widehat{EOM}$, que determina el ángulo pedido.



b) El ángulo que forma EP con α queda determinado por dicha recta y su proyección sobre α (recta OP). El ángulo buscado es $\widehat{EPO}$, y para hallarlo se construirá el triángulo rectángulo $\widehat{EOP}$.
El segmento $\overline{EO}$ ya se construyó en la parte anterior, y su medida es $\overline{EO} = (\sqrt{2}/2).x$ (Pitágoras en $\widehat{EOM}$).
El segmento $\overline{OP}$, se puede construir y calcular en el triángulo rectángulo OMP, en que OM = x / 2, $\overline{MP}$ = x / 4, y aplicando Pitágoras, se llega a que $\overline{OP} = (\sqrt{5}/4).x$



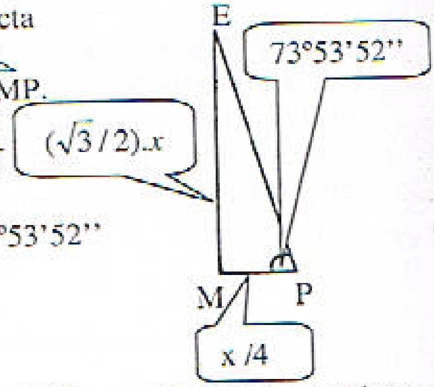


Para calcular el ángulo $\widehat{EPO}$, se aplica la formula de la tangente,

$$\operatorname{tg}(\widehat{EPO}) = \frac{EO}{OP} \Rightarrow \operatorname{tg}(\widehat{EPO}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\frac{\sqrt{5}}{4}x}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{EPO}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{EPO} = 51°40'16''$$

c) Para hallar el ángulo entre las rectas cruzadas EP y AD, se considera la recta paralela a AD por P. Como dicha recta coincide con la arista BC el ángulo buscado es $\widehat{EPM}$; y para hallarlo se construye el triángulo rectángulo EMP.



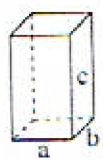
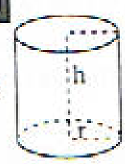
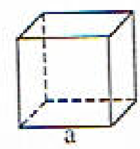
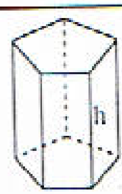
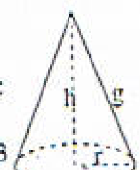
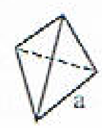
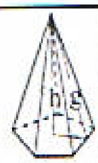
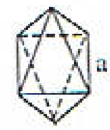
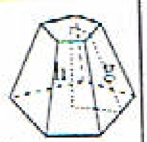
Para calcular $\widehat{EMP}$ se cumple : $\operatorname{tg}(\widehat{EPM}) = \dfrac{\overline{EM}}{\overline{MP}}$

$$\operatorname{tg}(\widehat{EPM}) = \frac{(\sqrt{3}/2).x}{x/4} \Rightarrow \operatorname{tg}(\widehat{EPM}) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EPM} = 73°53'52''$$

4. AREAS Y VOLUMENES

Es frecuente en geometría del espacio el calculo de áreas y volúmenes, por lo que, se incluye a continuación una tabla de formulas adecuada a la resolución de estos problemas. Se usaran las siguientes abreviaturas :

V ⇒ volumen
A ⇒ área
A_B ⇒ área de la base
P_B ⇒ perímetro de la base
r ⇒ radio
h ⇒ altura
a,b,c ⇒ aristas
g ⇒ altura de cara o generatriz

ORTOEDRO $A = 2(ab+ac+bc)$ $V = abc$ 	CILINDRO $A = 2r\,(r+h)\pi$ $V = r^2 h\,\pi$ 	CUBO $A = 6a^2$ $V = a^3$ 
PRISMA RECTO $A = P_B.h + 2A_B$ $V = A_B.h$ 	CONO $A = (r^2 + r.g)\pi$ $V = (r^2 h\,\pi)/3$ 	TETRAEDRO REGULAR $A = \sqrt{3}\,a^2$ $V = \sqrt{2}\,a^3/12$ 
PIRAMIDE REGULAR $A = (P_B.g)/2 + A_B$ $V = A_B.h/3$ 	TRONCO DE CONO $A = (r+r')g\,\pi + (r^2+r'^2)\pi$ $V = h\,(r^2+r'^2+r.r')\pi/3$ 	OCTAEDRO REGULAR $A = 2\sqrt{3}\,a^2$ $V = \sqrt{2}\,a^3/3$ 
TRONCO DE PIRAMIDE $A = (P_B+P_{B'})g/2$ $V = (A_B+A_{B'}+\sqrt{A_B.A_{B'}})\,h/3$ 	ESFERA $A = 4\,r^2\pi$ $V = 4r^3\pi/3$ 	

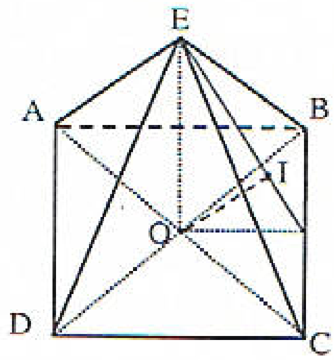
4.1 EJEMPLO

Se considera una pirámide regular de base cuadrada ABCD, vértice E y cuyas aristas son todas iguales de medida x. Sea O el centro del cuadrado ABCD.

a) Probar que O es el centro de la esfera circunscripta a la pirámide y hallar área y volumen de la esfera.

b) Hallar área y volumen de la pirámide ABCDE.

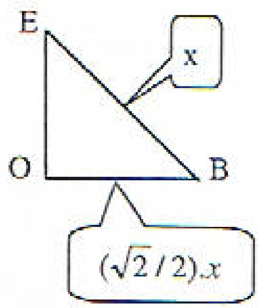
c) Hallar área y volumen del poliedro BCEO.



a) Por ser O centro del cuadrado, equidista de sus vértices una medida igual a la mitad de la diagonal, o sea $(\sqrt{2}/2).x$ (Pitágoras). Probaremos que $\overline{OE}$ es igual a dicha medida.

En el triángulo rectángulo $\widehat{EOB}$ se tiene que $\overline{OB}=(\sqrt{2}/2).x$, $\overline{EB}$=x y por Pitágoras

$\overline{EO}=\sqrt{\overline{EB}^2-\overline{OB}^2}$.



Efectuando operaciones resulta que $\overline{EO}=(\sqrt{2}/2).x$, entonces, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}$ por lo que O es el centro de la esfera circunscripta

- El área de la esfera es $A=4\,r^2\pi \Rightarrow A=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\pi$

$\Rightarrow A=2\,x^2\pi$

- El volumen será $V=\dfrac{4.r^3\pi}{3} \Rightarrow V=\dfrac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^3\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x^3\pi$

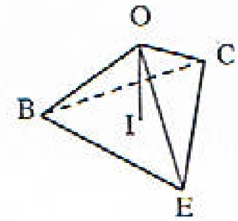
b)

- El área de la pirámide es $A=(P_B.g)/2+A_B$
  - Como la base es un cuadrado $\Rightarrow P_B=4x$
  - Para hallar g altura de cara del triángulo equilátero se aplica Pitágoras $g^2=x^2-(x/2)^2 \Rightarrow g=(\sqrt{3}/2).x$
  - El área de la base será $A_B=x^2$.

Sustituyendo se obtiene que $A=\dfrac{4x.\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}+x^2 \Rightarrow A=(1+\sqrt{3})x^2$

- El volumen será $V=\dfrac{A_B.h}{3} \Rightarrow V=\dfrac{x^2.\frac{\sqrt{2}}{2}x}{3} \Rightarrow V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$

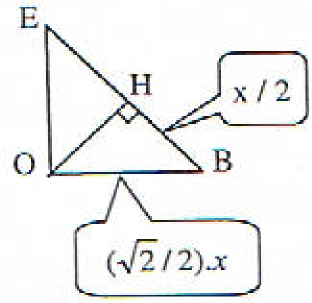
c) El poliedro BCEO, es una pirámide regular de base el triángulo equilátero $\widehat{BCE}$, de lados de medida x, y cuyas aristas laterales miden $\frac{\sqrt{2}}{2}.x$



- Para calcular el área, se debe hallar la altura de cara g, en uno de los triángulos , por ejemplo, el $\widehat{EOB}$.

$\overline{EO} = \frac{\sqrt{2}}{2}.x$, $\overline{EH} = \frac{x}{2}$, y aplicando

Pitágoras , $\overline{OH} = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EH}^2} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{x}{2}$

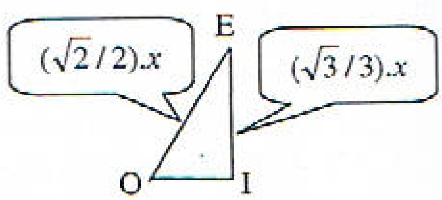


- $g = \frac{x}{2}$
- $A_B = \dfrac{x.(\frac{\sqrt{3}}{2}).x}{2} \Rightarrow A_B = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
- $P_B = 3.x$
- $A = \dfrac{P_B.g}{2} + A_B \Rightarrow A = \dfrac{3x.(\frac{x}{2})}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow A = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}x^2$

- Para calcular el volumen, se debe hallar la medida de la altura de la pirámide, $\overline{OI}$, siendo I, el centro de la cara $\widehat{BCE}$.

En el triángulo $\widehat{OIE}$, se cumple que $\overline{EO} = \frac{\sqrt{2}}{2}.x$,

$\overline{EI} = \frac{\sqrt{3}}{3}.x$ (pues I es el baricentro del triángulo equilátero $\widehat{BCE}$ y $\overline{EI}$ es dos tercios de la medida $\frac{\sqrt{3}}{2}.x$), y si se aplica Pitágoras,



se obtiene que $\overline{OI} = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EI}^2} \Rightarrow \overline{OI} = \frac{\sqrt{6}}{6}x$

Finalmente aplicando la formula de volumen $V = \dfrac{A_B.h}{3}$

resulta $V = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{4})x^2.(\frac{\sqrt{6}}{6})x}{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{24}x^3$

5. EJERCICIOS

1) Sea ABCDEFGH, un cubo de arista de medida x, y $\{O\} = AG \cap EC$, siendo $\overline{AG}$ y $\overline{EC}$ diagonales del cubo.
   a) Hallar la distancia $\overline{OA}$, y el área y volumen de la esfera circunscripta al cubo.
   b) Hallar la distancia de O, al plano (A,B,C), y el área y volumen de la esfera inscrita.
   c) Hallar la distancia entre las rectas cruzadas AD y BF.

2) Se considera un tetraedro regular ABCD de arista de medida x, siendo M y N puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.
   a) Construir y calcular el rectilíneo del diedro que forman dos caras.
   b) Construir y calcular el ángulo que forman la recta AB con el plano (B,C,D).
   c) Construir y calcular el ángulo que forman la recta AC con el plano (A,M,N).

3) Sea ABCDEF, un octaedro regular de arista de medida x, y $\{O\} = AC \cap BD$, siendo $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales del octaedro.
   a) Calcular área y volumen del octaedro.
   b) Deducir que O es el centro de la esfera circunscripta al octaedro y calcular su radio, área y volumen.
   c) Deducir que O es el centro de la esfera inscripta y calcular su radio, área y volumen.
   d) Construir y calcular el rectilíneo del diedro de caras (E,B,C) y (F,B,C)

4) De un triedro de aristas (a), (b) y (c), y vértice V, se conocen sus caras, tal que : $\widehat{a,b} = 60°$, $\widehat{b,c} = 30°$, y $\widehat{a,c} = 45°$. Construir un rectilíneo del diedro de caras determinadas por (a,c) y (a,b) y cuya arista es (a).

5) En un tetraedro regular ABCD, de altura $\overline{AI}$, sea O el punto medio de $\overline{AI}$.
   a) Demostrar que $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ y que O no es el centro de la esfera circunscrita.
   b) Demostrar que el triedro de vértice O, cuyas aristas incluyen a B, C y D, es trirrectángulo.

6) Sea ABCDS, una pirámide regular de base rectangular, de lados $\overline{AB} = 2x$ y $\overline{AD} = x$, y cuya altura es $\overline{SI} = 2x$. Sean los planos $\alpha = (A,B,C)$, $\beta = (B,C,S)$ y $\gamma = (A,B,S)$.
   a) Construir y calcular los rectilíneos de los diedros $\widehat{\alpha,\beta}$ y $\widehat{\alpha,\gamma}$.
   b) Hallar las distancias $d(I,\beta)$, y $d(I,\gamma)$.
   c) Hallar el centro de la esfera circunscripta a la pirámide, radio y volumen.

7) Se considera un tetraedro regular ABCD de arista de medida x. Si se toman los seis puntos medios de las aristas, queda determinado un octaedro regular.
   a) Calcular el volumen del tetraedro.
   b) Probar que el volumen del octaedro es la mitad del volumen del tetraedro.

8) Se considera un cubo ABCDEFGH, cuya arista mide x, y tal que O el centro de la cara ABCD. Sean $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al cuadrado ABCD, y $\mathscr{C}_1$, la circunferencia inscripta al cuadrado EFGH .

a) Calcular el volumen del cono determinado por $\mathscr{C}_1$ y O.

b) Se considera el cilindro que tiene como una de las bases a la circunferencia $\mathscr{C}$. Calcular que altura debe tener el cilindro, para que el volumen de éste sea igual al del cono.

c) Sea $\mathscr{C}_2$, la otra base del cilindro, con $\mathscr{C}_2$ entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$. Calcular el volumen del tronco de cono determinado por $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

9) Sea ABCDEFGH un cubo de arista de medida x. Se consideran los siguientes puntos: M$\in \overline{AE}$ con $\overline{EM} = x / 4$; Q$\in \overline{AD}$ con $\overline{AQ} = x / 4$ y P$\in \overline{BF}$ con $\overline{BP} = x / 4$.

a) Determinar el perímetro del $\overset{\triangle}{MPQ}$.

b) Determinar la perpendicular común entre las rectas AD y MP, y calcular las distancias entre dichas rectas.

c) Calcular y construir un rectilíneo del diedro que determinan los planos (M,P,Q) y (A,B,E)

10) Sea PQRKLM , un prisma recto de base triangular $\widehat{PQR}$ con PQ $\parallel$ KL, QR $\parallel$ LM y PR $\parallel$ KM, tal que $\overline{QR} = x$, $\overline{PQ} = (3 / 2).x$, $\overline{QM} = 2x$ y $\overline{PM} = (5/2).x$

a) Demostrar que $\widehat{PQM} = 90°$

b) Demostrar que $\widehat{PQR} = 90°$

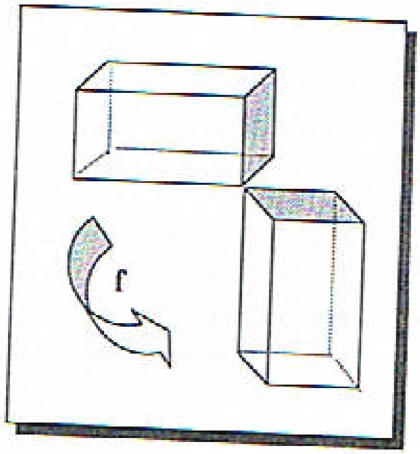
c) Hallar área y volumen del prisma:

d) Hallar el centro y radio de la circunferencia circunscripta al prisma.

e) Calcular y construir un rectilíneo del diedro, que determinan los planos (P,Q,R) y (P,Q,M)

CAPITULO 17

ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

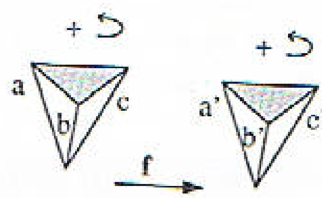


1.- DEFINICION

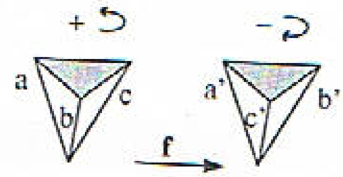
Se afirma que f es una isometría en el espacio, si y solo si f es una función de puntos del espacio en el espacio, que conserva las distancias.

f es isometría en el espacio $\Leftrightarrow$ 1) $f:\ \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{E}$, f biyectiva
2) Para todo par de puntos X,Y del espacio, se cumple que $\overline{XY} = \overline{f(X)\,f(Y)}$

- Las isometrías que conservan el sentido en el espacio, se denominan directas, y las que lo invierten, indirectas.



DIRECTA



INDIRECTA

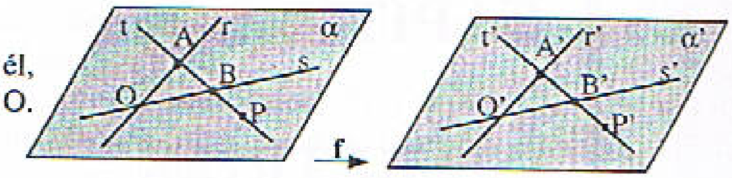
- El conjunto de las isometrías del espacio, con la composición forman una estructura algebraica de grupo.

- Las isometrías del espacio, al igual que las del plano, transforman rectas en rectas, semirrectas en semirrectas, y segmentos y ángulos, en segmentos y ángulos. Se probará a continuación que los planos se transforman en planos.

2. IMAGEN DE UN PLANO

La imagen de un plano en una isometría del espacio, es otro plano.

Demostración



Sea un plano α, e incluidas en él, dos rectas (r) y (s) secantes en O. Sean (r'), (s') y O', sus imágenes en la isometría f, y α', el único plano determinado por estas rectas. Se demostrará que todo punto $P \in \alpha$, tiene como imagen un punto $P' \in \alpha'$.

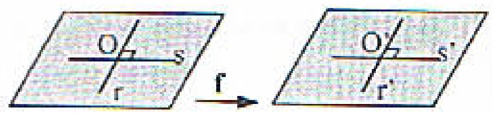
Por P se considera una recta (t), que corte a (r) y (s), en A y B. Como $A' \in r'$ y $B' \in s'$, la recta (t'), debe estar incluida en α', pues dos de sus puntos pertenecen a este plano (axioma). Considerando que $P' \in t'$, se concluye que $P' \in \alpha'$.

Basta considerar la isometría inversa f^{-1}, para probar en forma análoga que todo punto perteneciente a α', tiene una preimagen en el plano α.

3. CONSERVACION DE LA PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

La perpendicularidad entre rectas, se conserva en las isometrías del espacio.

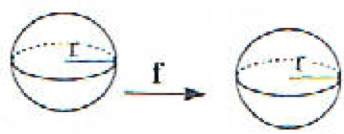
Demostración



Si $r \perp s$, entonces el ángulo $r\widehat{O}s$ es recto. Como las isometrías conservan las amplitudes de los ángulos, se cumplirá que su imagen $r'\widehat{O'}s'$, también será un ángulo recto, lo que implica que $r' \perp s'$

4. EJERCICIO TEORICO

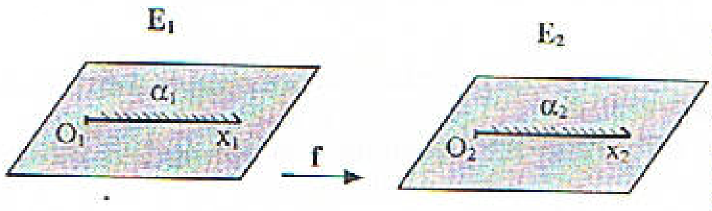
Demostrar que la imagen de una cáscara esférica de centro O y radio r, en una isometría del espacio, es otra cáscara esférica de igual radio



5. AXIOMA DE DETERMINACION DE ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

Dadas dos cuaternas, formadas por un punto, una semirrecta, un semiplano y un semiespacio, existe y es única la isometría f del espacio, que hace corresponder una con otra.

$$f : E \to E \ / \ (O_1, \overline{O_1x_1}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{f} (O_2, \overline{O_2x_2}, \alpha_2, E_2)$$



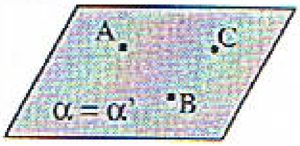
En cada cuaterna,la semirrecta tiene como origen al punto, el semiplano tiene como borde a la recta que incluye la semirrecta, y el semiespacio tiene como borde al plano que incluye al semiplano.

6. PLANO UNIDO

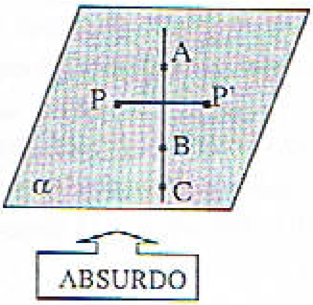
Si una isometría del espacio, deja unidos a tres puntos no alineados, entonces deja unido al plano que ellos determinan.

Demostración

Sea la isometría f, tal que f (A) = A, f (B) = B y f (C) = C, y , α el plano que estos puntos determinan. Obsérvese que α', imagen de α en la isometría f, es el mismo plano, pues los puntos A, B y C determinan un único plano. Sea P otro punto cualquiera de α.



Supongamos por absurdo que f (P) = P', y P' $\neq$ P.



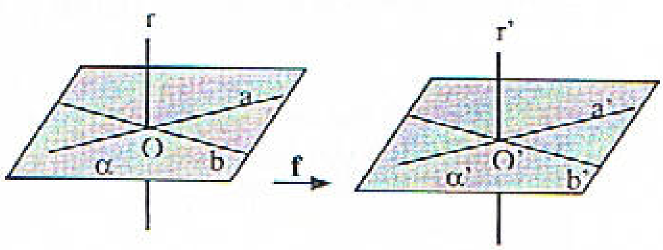
Como las isometrías conservan las distancias, se cumplirá que $\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{BP} = \overline{BP'}$ y $\overline{CP} = \overline{CP'}$, por lo que, A, B y C, pertenecerán a la mediatriz de $\overline{PP'}$, o sea que, dichos puntos, estarán alineados, en contradicción con la hipótesis inicial.
Se concluye que es absurdo suponer que existan puntos del plano α que no se transformen en sí mismos, de donde, el plano permanece unido como se quería demostrar.

7. CONSERVACIÓN DE LA PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS

La perpendicularidad entre rectas y planos se conserva en las isometrías del espacio.

Demostración

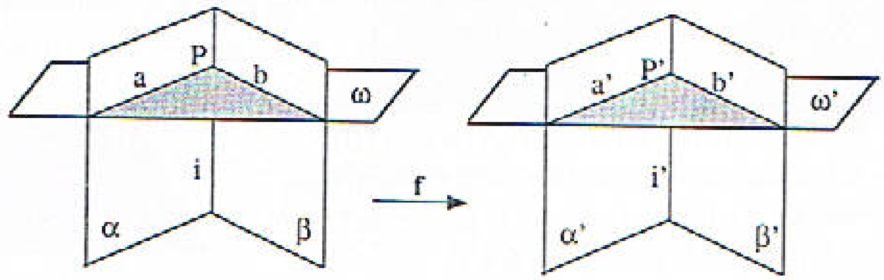
Sea la recta (r), perpendicular a α por O, y (r'), α'y O', sus imágenes en la isometría **f** .



Se demostrará que $r' \perp \alpha'$.
Se consideran las rectas (a) y (b), incluidas en α, y que pasan por O.
Como $r \perp \alpha$, entonces $r \perp a$ y $r \perp b$.
Considerando que la perpendicularidad entre rectas, se conserva en las isometrías del espacio, se cumplirá que $r' \perp a'$ y $r' \perp b'$, por O'.
Esta última afirmación implica que $r' \perp \alpha'$, como se quería demostrar.

8. DIEDROS Y RECTILINEOS CONGRUENTES

Si dos diedros son congruentes entonces tienen rectilíneos congruentes.



Demostración

Sea el diedro $\widehat{\alpha,\beta}$, de arista (i), $\widehat{aPb}$ un rectilíneo del mismo determinado por el plano ω ; y sus respectivas imágenes $\widehat{\alpha',\beta'}$, ω', (i') y P', en la isometría **f** que los hace congruentes. Como $i \perp \omega$, se cumplirá que $i' \perp \omega'$, pues la perpendicularidad entre rectas y planos se conserva en las isometrías.

Si $a' = \alpha' \cap \omega'$ y $b' = \beta' \cap \omega'$, entonces $\widehat{a'P'b'}$, es por definición un rectilíneo del diedro $\widehat{\alpha',\beta'}$. Como (a') y (b'), deben ser las imágenes de las intersecciones (a) y (b), de ω con α y β, se cumplirá que $f(\widehat{aPb}) = \widehat{a'P'b'}$, y en consecuencia la igualdad de los rectilíneos $\widehat{aPb} = \widehat{a'P'b'}$, como se quería demostrar.

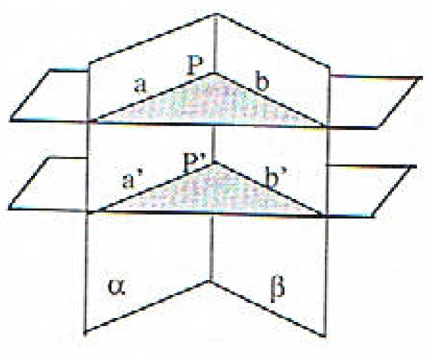
- Recíprocamente se cumplirá que si dos diedros tienen rectilíneos congruentes entonces son congruentes.

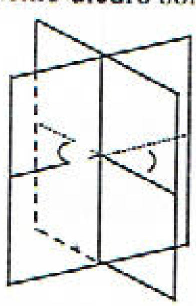
  Demostración

  Sea **f** la isometría que hace corresponder $\widehat{aPb}$ con $\widehat{a'P'b'}$ y $f(i) = i''$. Como la perpendicularidad entre rectas y planos se conserva, se cumplirá que $i'' \perp \omega'$, pero como por P' existe una sola perpendicular a ω', deben ser la misma recta (i'') e (i').

  Considerando que las caras de los diedros quedan determinadas por $\alpha = (a,i)$, $\beta = (b,i)$, $\alpha' = (a',i')$ y $\beta' = (b',i')$, se concluye que $f(\widehat{\alpha,\beta}) = (\widehat{\alpha',\beta'})$, y al corresponderse en la isometría se cumple la congruencia $\widehat{\alpha,\beta} = \widehat{\alpha',\beta'}$

- En particular si $\widehat{\alpha,\beta}$ coincide con $\widehat{\alpha',\beta'}$, se puede afirmar que los rectilíneos de un mismo diedro son congruentes.

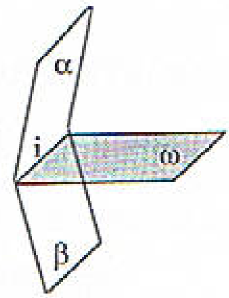




- Los diedros opuestos por la arista, son congruentes, por ser sus rectilíneos, ángulos opuestos por el vértice

9. SEMIPLANO BISECTOR

9.1 DEFINICION



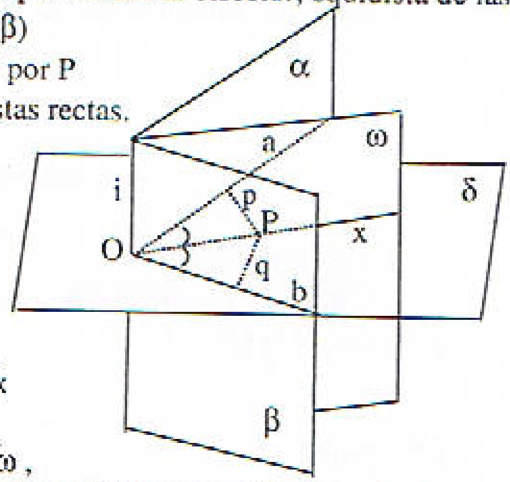
Dado cualquier diedro convexo $\widehat{\alpha,\beta}$, de arista (i) se denomina , semiplano bisector ω, al semiplano interior de borde (i), que determina con las caras del mismo dos diedros congruentes.

9.2 EL SEMIPLANO BISECTOR COMO LUGAR GEOMETRICO

El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un diedro convexo, es el semiplano bisector del mismo.

Demostración

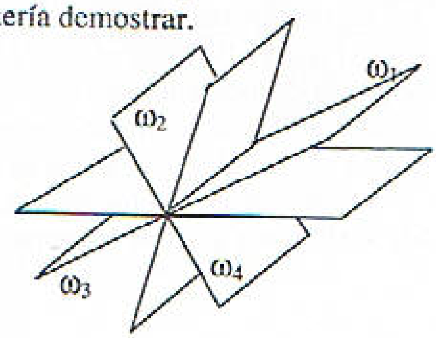
Sea ω el semiplano bisector del diedro $\widehat{\alpha,\beta}$.
Se probará en primer lugar que todo punto P, que pertenezca al bisector, equidista de las caras del mismo , o sea : $P\in \omega \Rightarrow d(P,\alpha) = d(P,\beta)$
Sean las rectas (p) y (q), perpendiculares a α y β por P respectivamente, y el plano δ determinado por estas rectas.



El plano δ es perpendicular a (i), pues
$p \perp \alpha \Rightarrow p \perp i$, y $q \perp \beta \Rightarrow q \perp i$,
entonces este plano contiene dos rectas ortogonales a (i), y en consecuencia $\delta \perp i$.
Sean las siguientes intersecciones :
$\delta \cap \alpha = a$, $\delta \cap \beta = b$, y $\delta \cap \omega = x$.
Se puede afirmar entonces que $\widehat{aOb}$, $\widehat{aOx}$, y $\widehat{bOx}$ son los respectivos rectilíneos de los diedros $\widehat{\alpha,\beta}$, $\widehat{\alpha,\omega}$, y $\widehat{\beta,\omega}$ .Como los diedros $\widehat{\alpha,\omega}$ y $\widehat{\beta,\omega}$, son congruentes por definición, se cumplirá que sus rectilíneos también lo serán, por lo que $\widehat{aOx} = \widehat{bOx}$, y en consecuencia la semirrecta $\overleftarrow{Ox}$ será bisectriz del ángulo $\widehat{aOb}$.
Considerando que $P\in \overleftarrow{Ox}$, se cumple que $d(P,a) = d(P,b)$.
Además como $d(P,a) = d(P,\alpha)$ y $d(P,b) = d(P,\beta)$, se concluye la tesis

Recíprocamente se cumplirá que si : $d(P,\alpha) = d(P,\beta) \Rightarrow P \in \omega$
Si $d(P,\alpha) = d(P,\beta)$, entonces $d(P,a) = d(P,b)$, y en consecuencia P pertenecerá a la bisectriz $\overleftarrow{Ox}$,del ángulo $\widehat{aOb}$. La anterior afirmación implica que $\widehat{aOx} = \widehat{bOx}$, y como estos ángulos , son rectilíneos de $\widehat{\alpha,\omega}$ y $\widehat{\beta,\omega}$, se verificará la congruencia de esos diedros , y en consecuencia que $P\in \omega$, como se quería demostrar.

- Los semiplanos bisectores, de los diedros formados por dos planos secantes, se hallan incluidos en dos planos perpendiculares entre sí. ⟹



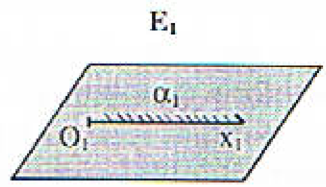
10. ISOMETRIA IDENTIDAD EN EL ESPACIO

10.1 DEFINICION

Se denomina isometría identidad en el espacio, y que se anotará I_d, a la isometría determinada por las siguientes cuaternas correspondientes :

$$\boxed{I_d : E \to E \ / \ (O_1, \overrightarrow{Ox_1}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{I_d} (O_1, \overrightarrow{Ox_1}, \alpha_1, E_1)}$$

- La isometría identidad, deja invariante al espacio, o sea que para todo punto P del espacio, se cumplirá que $I_d(P) = P$.



10.2 PROPIEDAD

Si una isometría del espacio, deja unidos cuatro puntos no coplanarios, entonces es la identidad.

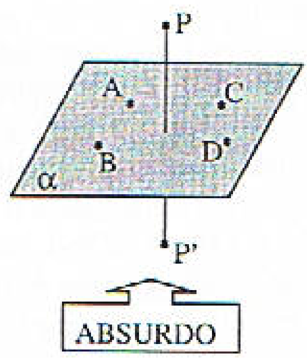
Demostración

Sean cuatro puntos A, B, C y D, no coplanarios y la isometría f, tal que $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$, y $f(D) = D$

Se demostrará que todo punto P del espacio se transforma en si mismo.

Sea $P' = f(P)$, y supongamos por absurdo que $P' \neq P$. Considerando que las isometrías conservan las distancias, se cumplirán las siguientes igualdades entre las medidas de los segmentos isométricos :

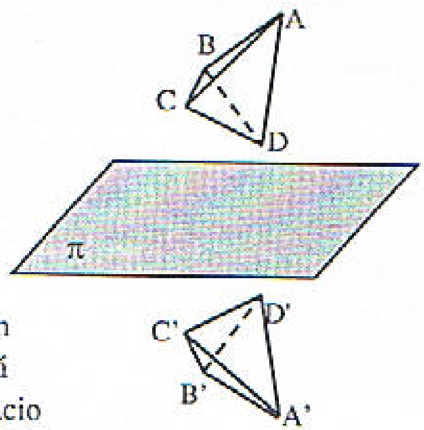
$\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{BP} = \overline{BP'}$, $\overline{CP} = \overline{CP'}$, y $\overline{DP} = \overline{DP'}$.



Se puede deducir entonces que A, B, C y D ,pertenecerán al plano mediatriz del segmento $\overline{PP'}$, en contradicción con la hipótesis inicial que afirma que estos puntos no son coplanarios, o sea que, es absurdo suponer que $P \neq P'$.

Se concluye entonces que para todo punto P del espacio , se cumplirá que $f(P) = P$, o sea que f es la isometría identidad

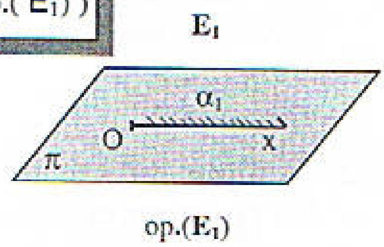
11. SIMETRIA ESPECULAR



11.1 DEFINICION

Se denomina simetría especular, con respecto al plano π, y que se anotará S_π, a la isometría indirecta del espacio determinada por las siguientes cuaternas correspondientes :

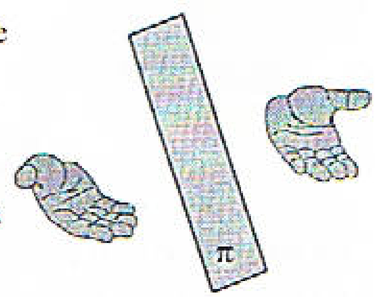
$$S_\pi : E \to E \quad / \; (O, \overrightarrow{Ox}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{S_\pi} (O, \overrightarrow{Ox}, \alpha_1, op.(E_1))$$



- El semiplano α_1 de la definición está incluido en el plano de simetría π, lo que implica que dicho plano es unido en la transformación.

- Al ser la simetría especular, una isometría indirecta, invierte el sentido en el espacio, y en consecuencia el sentido de los triedros.

- Obsérvese que pueden existir figuras en el espacio, que a pesar de ser isométricas, por corresponderse en la simetría especular, es imposible hacerlas coincidir, como consecuencia de la inversión del sentido en el espacio. Es imposible, por ejemplo, hacer coincidir el guante derecho, con el guante izquierdo, ambas figuras simétricas con respecto al plano π..



11.2 EJERCICIO TEORICO

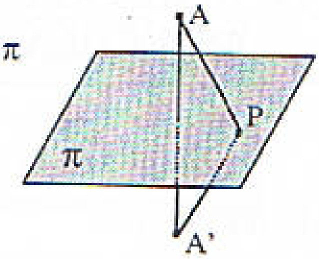
Probar que la simetría especular, es una isometría involutiva.

11.3 EL PLANO DE SIMETRIA COMO PLANO MEDIATRIZ

El plano de simetría, es el plano mediatriz de todo segmento determinado por cualquier par de puntos simétricos, no pertenecientes a él.

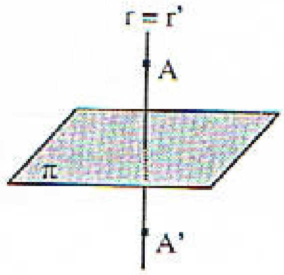
Demostración

Sea A un punto cualquiera del espacio, exterior a π y $A' = S_\pi(A)$. Como todo punto P del plano π, es unido, se verificará que $S_\pi(AP) = A'P$, de donde $\overline{AP} = \overline{A'P}$.
Se cumple entonces que todo punto del plano π, equidista de A y A', o sea que π, es el plano mediatriz del segmento $\overline{AA'}$.



11.4 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que las rectas, determinadas por puntos simétricos, son perpendiculares al plano de simetría y dobles

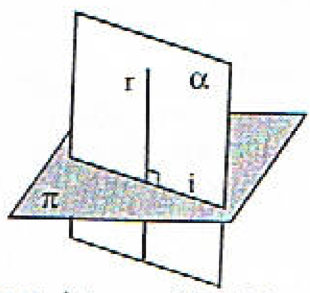


11.5 PLANOS DOBLES

Los planos perpendiculares al plano de simetría son dobles.

Demostración

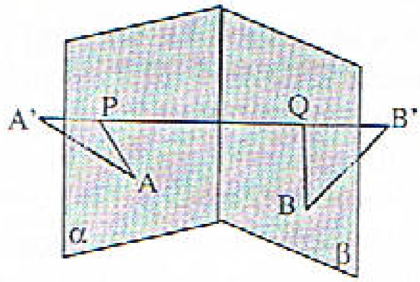
Sea un plano α, perpendicular al plano de simetría π, y la recta (i), su intersección con éste.
Considerando que $\alpha \perp \pi$, entonces existe una recta (r),incluida en α y perpendicular a π.



Como dicha recta es doble, y la recta intersección (i) es unida, (pues pertenece al plano de simetría), se cumplirá en S_π que,
$r \rightarrow r$, e , $i \rightarrow i$, por lo que el plano determinado por (r,i), se transformará en si mismo, o sea que $S_\pi(\alpha) = \alpha$, como se quería demostrar.

11.6 EJEMPLO

Dado un diedro $\widehat{\alpha,\beta}$, y dos puntos interiores A y B, hallar un punto P perteneciente a α y otro punto Q perteneciente a β, tal que $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}$ sea la mínima distancia posible.



En primer lugar se halla el punto simétrico de A, respecto de α, y el de B respecto de β, resultando los siguientes puntos :

$A' = S_\alpha(A)$, $B' = S_\beta(B)$, $A'B' \cap \alpha = \{P\}$, $A'B' \cap \beta = \{Q\}$.

Como $P \in \alpha$ entonces, $\overline{AP} = \overline{A'P}$,

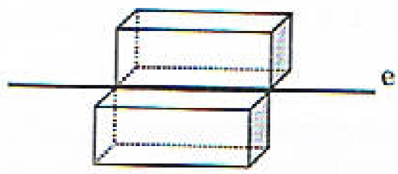
por lo que $\overline{AP}+\overline{PQ} = \overline{AP'}+\overline{PQ}$

Además como $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$ se cumple que

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}$$

Considerando que $\overline{A'B'}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$ y que la menor distancia posible entre los puntos A' y B' es la medida del segmento que estos determinan, los puntos P y Q así hallados son la solución al problema, pues para cualquier otro par de puntos P^* y Q^*, la distancia $\overline{A'P^*}+\overline{P^*Q^*}+\overline{Q^*B'}$ será mayor que $\overline{A'B'}$.

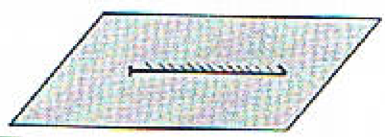
12. SIMETRIA AXIAL EN EL ESPACIO



12.1 DEFINICION

Se denomina simetría axial en el espacio de eje e y que se anotará S_e, a la isometría directa del espacio determinada por las siguientes cuaternas correspondientes:

E_1



$$S_e : E \to E \ \ / (O, \overleftarrow{Ox}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{S_e} (O, \overleftarrow{Ox}, op.(\alpha_1), Op.(E_1))$$

op.(E_1)

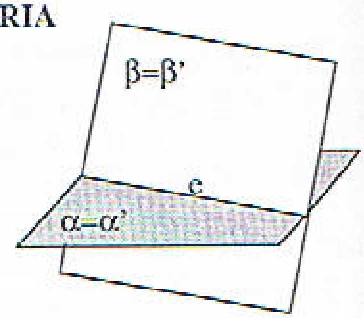
- La semirrecta $\overleftarrow{Ox}$ de la definición esta incluida en el eje de simetría (e) por lo que ésta pertenece unido en la transformación.
- La simetría axial en el espacio mantiene el sentido (isometría directa).

12.2 EJERCICIO TEORICO

Demostrar que la simetría axial es una isometría involutiva en el espacio.

12.3 PLANOS QUE CONTIENEN AL EJE DE SIMETRIA

Los planos que contienen el eje de simetría son dobles.



Demostración

Se demostrará previamente que todo semiplano con borde en el eje, tiene como simétrico su semiplano opuesto.

Sea β_1 un semiplano de borde (e) y β_2 su imagen en la simetría S_e. Se demostrará que $\beta_2 = \text{op.}(\beta_1)$.

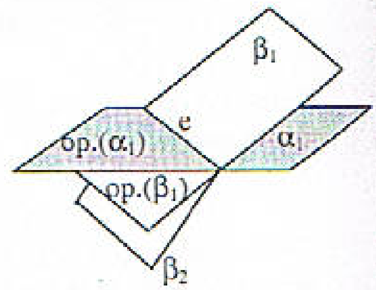
Como la simetría axial es involutiva, se cumple que si

$\beta_1 \rightarrow \beta_2$, entonces $\beta_2 \rightarrow \beta_1$,

por lo que el diedro $\widehat{\beta_1.\beta_2}$ tiene como simétrico al $\widehat{\beta_2.\beta_1}$.

Si β_2 fuera distinto del semiplano op.(β_1), el diedro $\beta_1.\beta_2$ que contiene al semiplano op.(α_1) sería mayor que el $\widehat{\beta_2.\beta_1}$ que contiene a α_1, lo cual resulta absurdo porque las isometrías conservan las medidas .

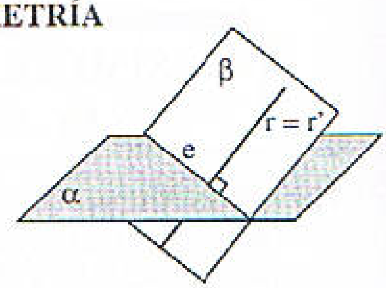
Se concluye que al transformarse cada semiplano en su opuesto los planos que contienen el eje de simetría permanecen globalmente invariantes.



ABSURDO

12.4 RECTAS PERPENDICULARES AL EJE DE SIMETRÍA

Las rectas perpendiculares al eje son dobles.



Demostración

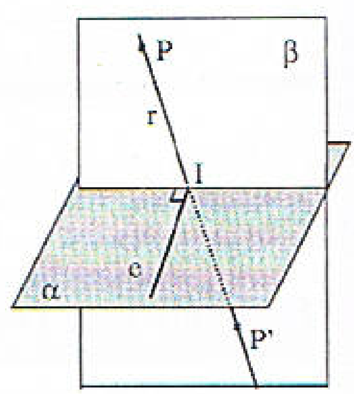
Sea β, el plano determinado por (r) y (e).

Como β se transforma en si mismo, (pues contiene al eje), para hallar la recta simétrica de (r) en S_e, basta hallarla en la simetría axial plana de eje (e), en el plano β.

La demostración es la misma que en geometría del plano.

12.5 PLANOS PERPENDICULARES AL EJE

Los planos perpendiculares al eje son dobles.



Demostración

Sea un plano β perpendicular al eje de simetría (e) y el punto I su intersección con eje.

Como $\beta \perp e$, toda recta (r) incluida en β y que pase por I, será perpendicular al eje (e). Además, como dichas rectas son dobles, según se demostró anteriormente, el plano β que las incluye, también será doble, por lo que, $S_e(\beta) = \beta$.

Observación

Sea un punto $P \in \beta$, y sea (r) una recta incluida en dicho plano, y que pase por P e I. Como la recta (r) es doble, el simétrico de P pertenece a (r). Sea $P' = S_e(P)$. Como $I \in e$, se cumple que $S_e(I) = I$, de donde $S_e(\overline{PI}) = \overline{P'I}$ y como I, P, y P' están alineados se verificará que I es punto medio de $\overline{PP'}$, por lo que, se puede afirmar, que P y P' se corresponden en la simetría central plana de centro I.

Conclusión

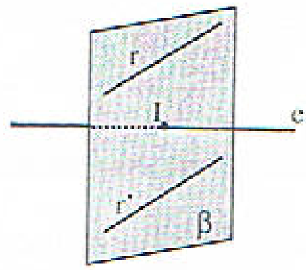
Dado un plano β perpendicular al eje, de simetría y un punto $P \in \beta$ se cumplirá que si $P \to P'$ en la simetría axial de eje (e), entonces, $P \to P'$, también en la simetría central plana de centro I siendo $\{ I \} = \beta \cap e$.

12.6 IMAGENES DE RECTAS ORTOGONALES AL EJE

Toda recta ortogonal con el eje, tiene como simétrica una paralela a ella.

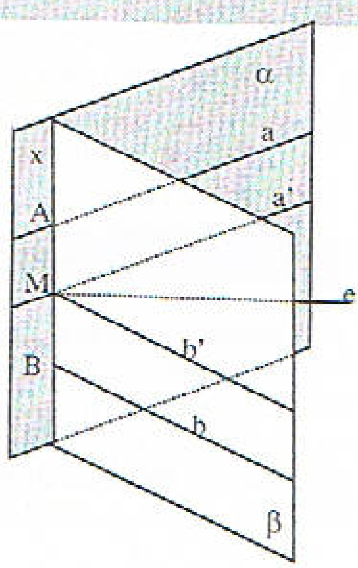
Demostración

Sea r ortogonal con el eje (e) y (r') su imagen en la S_e.
Si $r \perp e$, entonces existe un plano β, que incluye a (r), y perpendicular a (e). Sea $\beta \cap e = \{I\}$ Aplicando la observación del teorema anterior se puede afirmar que (r) y (r') se corresponden en la simetría central de centro I.
Es propiedad de la simetría central plana, que las rectas que no contienen al centro, tienen como imagen, una recta paralela, por lo que, queda demostrado que $r \parallel r'$



12.7 EJEMPLO

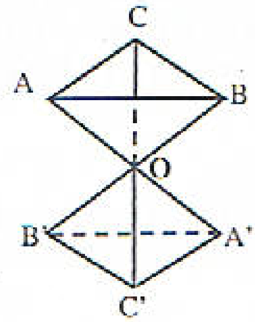
Sean dos planos α y β secantes en (x) y dos rectas (a) y (b), incluidas ~~en~~ α y β respectivamente, y perpendiculares a (x), por A y B. Sea M punto medio de AB y por M, las rectas (a') y (b'), paralelas a (a) y (b).
Sea (e) la bisectriz del ángulo $\widehat{a',b'}$, y $\mathcal{F} = a \cup b$.
Demostrar que (e) y (x) son ejes de simetría de $\mathcal{F}$.



Como $e \perp x$, (x) será una recta doble en la simetría de eje (e). Además, como (e) es bisectriz del ángulo $\widehat{a',b'}$, se puede afirmar que (a') y (b') son simétricas respecto del eje (e).
Entonces $\beta = S_e(\alpha)$, pues $\alpha = (a',x)$ y $\beta = (b',x)$
Siendo M punto medio de $\overline{AB}$ y $AB \perp e$, se cumple que, $B = S_e(A)$, y también que la recta perpendicular a (x) por A, incluida en α, se transformará en la perpendicular a (x) por B incluida en β,
o sea que, $b = S_e(a)$.

Como la simetría axial es involutiva también se cumplirá que $a = S_e(b)$, entonces, $S_e(a \cup b) = b \cup a$, o sea que $S_e(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$
Así mismo como las rectas perpendiculares al eje se transforman en si mismas, y como $x \perp a$ y $x \perp b$ se cumplirá que $S_x(a) = a$ y $S_x(b) = b$. de donde, $S_x(a \cup b) = a \cup b$ y en consecuencia $S_x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ como se quería probar.

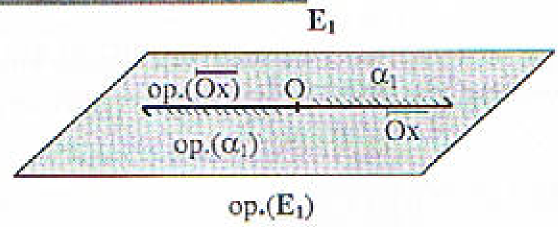
13. SIMETRIA CENTRAL



13.1 DEFINICION

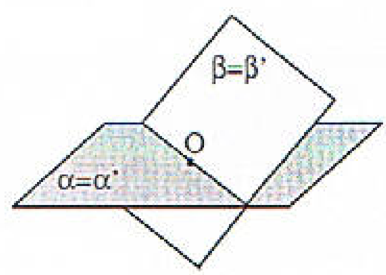
Se denomina simetría central de centro O, en el espacio, que se anotará C_o, a la isometría indirecta del espacio determinada por las siguientes cuaternas correspondientes:

$$C_o : E \to E \;/\; (O, \overline{Ox}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{C_o} (O, op.(\overline{Ox}), op.(\alpha_1), op.(E_1))$$



- Se observa que la simetría central, al igual que la simetría especular, invierte el sentido de los triedros en el espacio.
- Al transformarse el semiplano α_1 de la definición en su opuesto, el plano α que los incluye será doble en la transformación.
- Al nivel de dicho plano, todas las propiedades demostradas en simetría central plana se conservarán, pues la definición en el espacio respeta las condiciones de la definición en el plano; a modo de ejemplo, las rectas incluidas en α, que contienen al centro de simetría son dobles.

13.2 EJERCICIOS TEORICOS



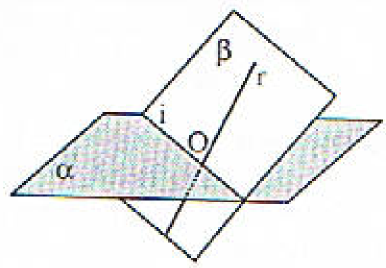
1. Demostrar que la simetría central en el espacio es involutiva.
2. Demostrar que los planos que contienen al centro de simetría son dobles. (la demostración puede ser efectuada en forma análoga a la realizada en simetría axial del espacio, en este mismo capítulo 12.3).

13.3 RECTAS QUE CONTIENEN AL CENTRO DE SIMETRIA

Las rectas que contienen al centro de simetría son dobles.

Demostración

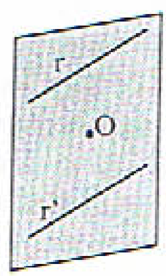
Basta considerar un plano β que incluya a (r).
Como dicho plano es doble, la imagen de (r) estará incluida en β.
Sea $\alpha \cap \beta = i$. Obsérvese que $O \in i$, y que la recta (i) es doble.
En estas condiciones, y a nivel del plano β, ya se ha demostrado en simetría central plana, que la recta (r) debe permanecer doble en la transformación.



13.4 EJERCICIOS TEORICOS

1) Demostrar que el centro de simetría O, es punto medio de todo par de puntos P y P' simétricos. ⇨

2) Demostrar que toda recta (r) que no contiene el centro de simetría, tiene como imagen una recta (r') paralela a ella. ⇨

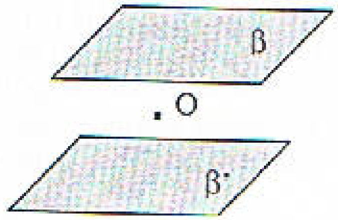


13.5 PLANOS QUE NO CONTIENEN AL CENTRO

Todo plano β que no contiene al centro de simetría tiene como imagen un plano β' paralelo a él.

Demostración

Supongamos por absurdo que los planos β y β' se cortan en una recta (i).
Al ser la simetría central una isometría involutiva, ésta realizará las siguientes transformaciones:
$\beta \rightarrow \beta'$, $\beta' \rightarrow \beta$ y por lo tanto $\beta \cap \beta' \rightarrow \beta' \cap \beta$,
o sea que $i \rightarrow i$. Si esta recta es doble, debe contener al centro de simetría O, en contradicción con la hipótesis inicial de que $O \notin \beta$, por lo que, se concluye $\beta \cap \beta' = \varnothing$, y en consecuencia $\beta \parallel \beta'$.



13.6 EJEMPLO

Sean tres planos α, β y ω, perpendiculares dos a dos y el punto O, la intersección común a los tres planos. Se considera un punto P perteneciente a ω y exterior a α y β.

Demostrar que $Co\,(P) = S_{\omega} \circ S_{\beta} \circ S_{\alpha}\,(P)$

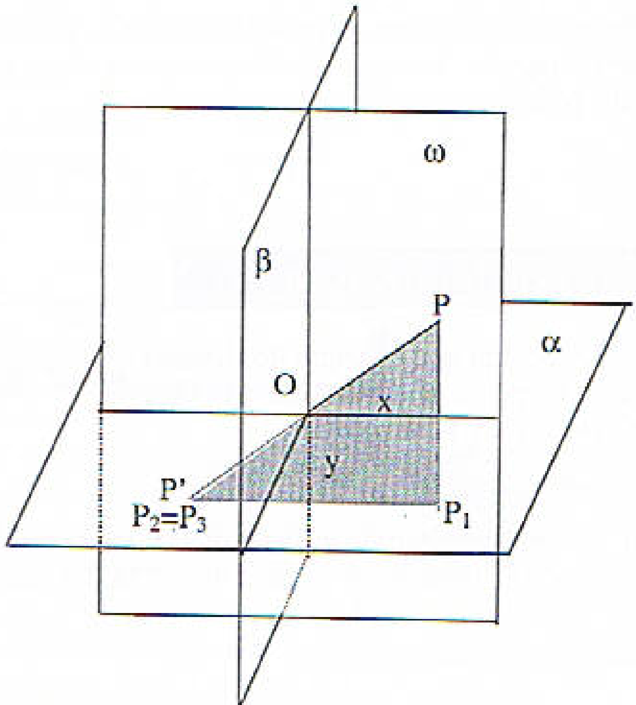
Sean $x = \alpha \cap \omega$, e $y = \beta \cap \omega$.

Se consideran las siguientes transformaciones :

$P \xrightarrow{S_\alpha} P_1 \xrightarrow{S_\beta} P_2 \xrightarrow{S_\omega} P_3$, y,

$P \xrightarrow{C_o} P'$

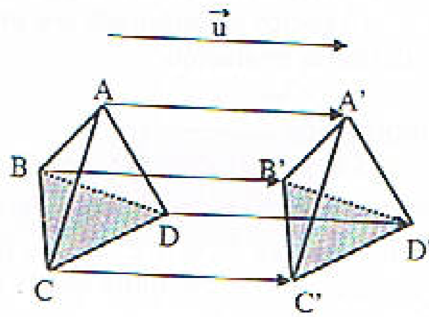
Se demostrará que $P' = P_3$



- En la simetría central se cumple que P' debe pertenecer al plano ω, pues la recta PO está incluida en él, con la condición de que O es el punto medio de $\overline{PP'}$.

- En la composición de las simetrías especulares, se cumple que como $PP_1 \perp \alpha$ y $P_1P_2 \perp \beta$, dichas rectas están incluidas en el plano ω perpendicular a los dos primeros , y que contiene a P.
  En consecuencia los puntos P_1 y P_2 pertenecen a ω.
  Además $P_2 = P_3$ por ser un punto unido en S_ω.
  Así mismo, la recta (x) es la mediatriz del segmento $\overline{PP_1}$ (perpendicular por el punto medio), y la recta (y) es mediatriz de $\overline{P_1P_2}$. Su intersección O será pues el circuncentro del triángulo $\widehat{PP_1P_3}$.
  Se deduce entonces que $\overline{OP} = \overline{OP_3}$, por lo que, O también es punto medio de $\overline{PP_3}$, de donde se tiene que cumplir que P_3 debe coincidir con P' como se quería demostrar.

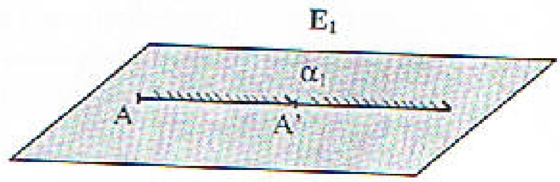
14. TRASLACION EN EL ESPACIO



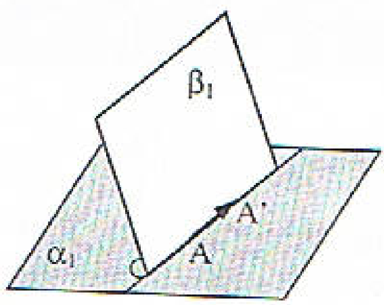
14.1 DEFINICION

Se denomina traslación en el espacio de vector $\vec{u}$, que se anotará $T\vec{u}$, a la isometría directa determinada por las siguientes cuaternas correspondientes :

$$T\vec{u} : E \rightarrow E \ / \ (A, \overleftarrow{AA'}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{T\vec{u}} (A', op.(\overleftarrow{A'A}), \alpha_1, E_1)$$

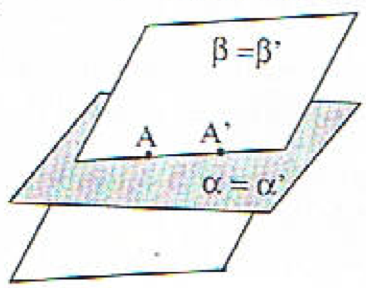


- El vector $\vec{u}$, es igual al vector $\overrightarrow{AA'}$.
- La recta AA', se denomina guía de la traslación.
- El plano α, que contiene a la guía , y al semiplano α_1, es doble en la traslación.
- A nivel del plano α son válidas, todas las propiedades demostradas en traslación del plano, ya que la definición en el espacio, respeta las condiciones de la definición de la geometría plana. Por ejemplo se cumplirá que, la guía de traslación, es una recta doble en dicha isometría.



- Es inmediato que todo semiplano β_1, con borde en la guía de traslación, es una figura doble, pues al ser el semiplano α_1 de la definición , doble en la transformación, el diedro $\widehat{\alpha_1,\beta_1}$, también debe permanecer doble para que se conserven las medidas.

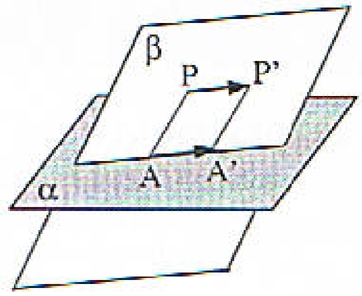
- Es corolario de la anterior afirmación, que los planos que contienen a la recta guía son dobles.



14.2 IMAGEN DE UN PUNTO

El vector determinado por un punto cualquiera y su imagen, es igual al vector que define la traslación.

Demostración



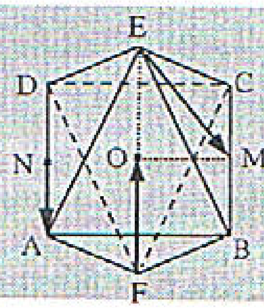
Sea la traslación $T_{\vec{u}}$, con $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$, y P un punto cualquiera. Se considera el plano β, determinado por A, A'y P . Como β permanece doble en la traslación, se cumplirá que la imagen P', de P, debe pertenecer a β.

A nivel del plano β, ya se ha demostrado, en traslación de geometría del plano , que los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{PP'}$ son iguales, por lo que se concluye la tesis.

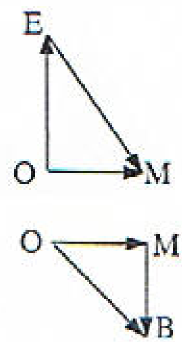
Observaciones

- En base a la anterior proposición, puede afirmarse que la traslación $T_{\vec{u}}$, puede quedar definida por cualquier par de puntos homólogos.
- Al conservarse todas las propiedades, del plano en el espacio, se cumple que el conjunto de todas las traslaciones del espacio con la composición, forman una estructura de grupo conmutativo.

14.3 EJEMPLO



Se considera un octaedro regular ABCDEF, de arista de longitud x, y centro O, con M y N puntos medios de los segmentos BC y AD respectivamente.
Determinar la traslación $T_{\vec{u}}$, resultante de la composición $T_{\overrightarrow{NA}} \circ T_{\overrightarrow{EM}} \circ T_{\overrightarrow{FO}}$



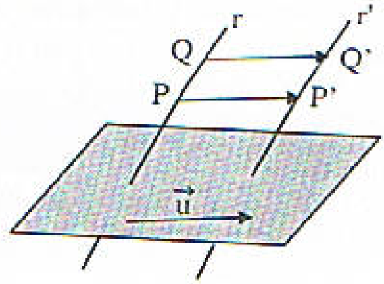
Para hallar el vector $\vec{u}$ se debe efectuar la suma de vectores $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{NA}$.
Aplicando el método de Chasles , y considerando que $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OE}$, resulta que $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{OM}$

Luego como $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MB}$, se cumplirá que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OB}$, de donde, $T_{\overrightarrow{OB}} = T_{\overrightarrow{NA}} \circ T_{\overrightarrow{EM}} \circ T_{\overrightarrow{FO}} = T_{\vec{u}}$

El módulo del vector queda determinado, por la medida de la mitad de la diagonal del octaedro , que puede calcularse por Pitágoras, y que es igual a $(\sqrt{2}/2).x$

14.4 EJERCICIO TEORICO

Probar que en toda traslación, las rectas correspondientes son paralelas.
Sugerencia : considere dos puntos P y Q de la recta (r).



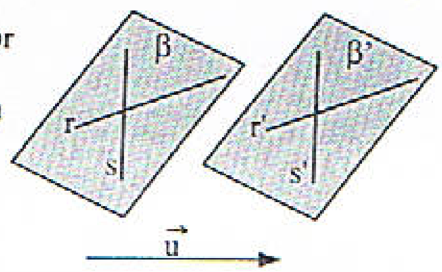
14.5 IMAGENES DE PLANOS

En toda traslación, los planos correspondientes son paralelos.

Demostración

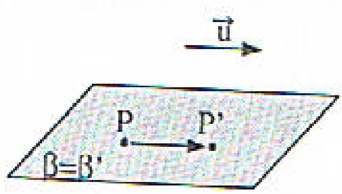
Sea β un plano cualquiera, (r) y (s) dos rectas secantes incluidas en él, y (r') y (s'), sus imágenes en la traslación $T_{\vec{u}}$.

Como el plano β' queda determinado por las rectas secantes (r') y (s'), que a su vez, son paralelas con (r) y (s),(por corresponderse en la traslación), se cumplirá por propiedad de paralelismo entre planos, que β = β' como se quería demostrar.



14.6 EJERCICIO TEORICO

Probar que si la dirección del vector es la misma que la de cualquier recta del plano, entonces el plano β es doble en la traslación.

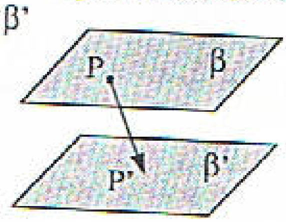


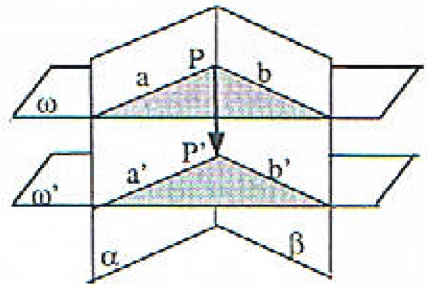
14.7 PLANOS CORRESPONDIENTES

Dos planos paralelos β y β'pueden corresponderse en cualquier traslación definida por un vector $\overrightarrow{PP'}$, con la condición que P∈ β y P'∈ β'

Demostración

En efecto , como el plano imagen de β, en toda traslación, debe ser paralelo a éste, y como por P', existe un único plano paralelo a β, entonces, la imagen de β en la traslación $T_{\overrightarrow{PP'}}$, debe ser β'.

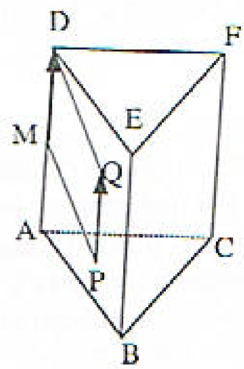




□ Se observa que la isometría, que hace corresponder un diedro $\widehat{\alpha,\beta}$, en si mismo, (figura doble), determinando rectilíneos congruentes, con los planos paralelos ω y ω', a la cual se hacía referencia en el numeral 8 de este capítulo, es la traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$ de la figura.

14.8 EJEMPLO

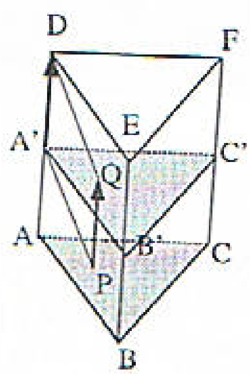
Sea ABCDEF un prisma de base triangular, con M punto medio de $\overline{AD}$, según figura. Sobre el triángulo $\widehat{ABC}$ de la base, se considera un punto variable P y se construyen los paralelogramos DMPQ. Hallar el lugar geométrico de Q al variar P.



Como el vector $\overrightarrow{MD}$ permanece invariante, y además $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MD}$ por ser el cuadrilátero DMPQ un paralelogramo, es posible afirmar que:

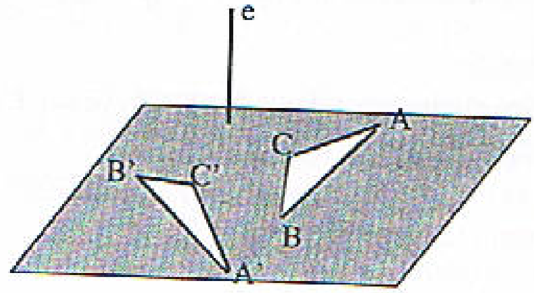
$P \xrightarrow{T_{\overrightarrow{MD}}} Q$

Se deduce entonces, que el lugar geométrico de P se transformará en el lugar geométrico de Q, en la traslación de vector $\overrightarrow{MD}$.
Como P varia en el triángulo $\widehat{ABC}$, Q debe pertenecer al A'B'C', imagen del primero en la traslación..



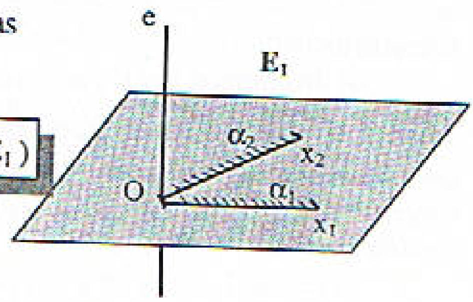
El lugar geométrico de Q, es entonces, el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, incluido en un plano paralelo al (A,B,C) por el punto M.

15. ROTACION EN EL ESPACIO



15.1 DEFINICION

Se denomina rotación de eje (e) y ángulo $\vec{\varphi}$, y que se anotará $R_{e,\vec{\varphi}}$, a la isometría directa del espacio que realiza las siguientes cuaternas correspondientes :



$$R_{e,\vec{\varphi}}: E \to E \;/\; (O, \overline{Ox_1}, \alpha_1, E_1) \xrightarrow{R_{e,\vec{\varphi}}} (O, \overline{Ox_2}, \alpha_2, E_1)$$

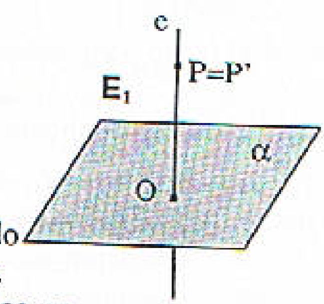
con las siguientes condiciones:

- Las semirrectas $\overline{Ox_1}$ y $\overline{Ox_2}$ determinan el plano α.
- El plano α contiene a los semiplanos α_1 y α_2.
- El semiespacio E_1 tiene como borde a α.
- El eje (e) es perpendicular a α por O.
- El ángulo orientado de giro $\vec{\varphi}$ queda determinado por $x_1\widehat{O}x_2$.
- Es inmediato que el plano α es doble en el giro, pues el semiplano α_1 y su imagen α_2 están incluidos en él.

15.2 EJE DE GIRO

El eje de giro es unido en la rotación.

<u>Demostración</u>



Sea (e') la imagen de (e) en la rotación.

En el giro, el punto O es unido por definición, y el plano α se transforma en sí mismo (figura doble).

Como la perpendicularidad entre rectas y planos se mantiene en las isometrías, se cumplirá que $e' \perp \alpha$ por O; y considerando que dicha perpendicular es única, se debe de cumplir que $e' = e$.

Además, todo punto P de eje (e) se transformará en si mismo, como se demostrará a continuación. Si $P \neq O$, entonces $P \in E_1$ o al semiespacio opuesto. Supongamos que $P \in E_1$, entonces su imagen P' también pertenece a E_1, lo que implica que P' pertenece a la misma semirrecta de origen O incluida en (e) que P, y a la misma distancia, ya que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ por ser los segmentos isométricos.

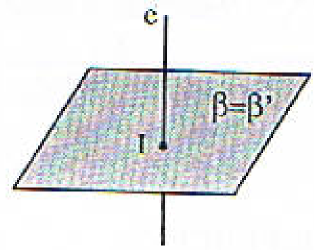
Se concluye entonces que $P = P'$ para todo punto $P \in e$, como se quería demostrar.

15.3 PLANOS PERPENDICULARES AL EJE

Los planos perpendiculares al eje de giro son dobles en la transformación.

Demostración

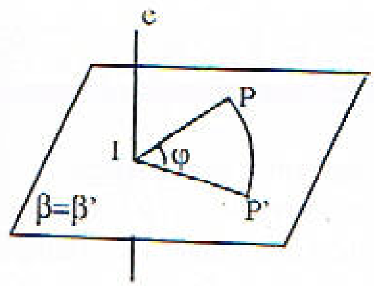
Sea el plano β, tal que $\beta \perp e$, $\beta \cap e = \{ I \}$, y β' la imagen de β en la rotación $R_{e,\vec{\varphi}}$.
Como I es unido en la transformación, entonces, dicho punto también pertenece a β'.



Considerando que la perpendicularidad entre rectas y planos, se conserva en las isometrías, y que por I, existe un único plano perpendicular a la recta (e), entonces, se debe de cumplir que $\beta = \beta'$, como se quería demostrar.

Corolario

Si dos puntos P y P', se corresponden en una rotación en el espacio $R_{e,\vec{\varphi}}$, también son correspondientes en una rotación del plano $R_{I,\vec{\varphi}}$, sobre un plano perpendicular al eje y que contenga a estos puntos.



El centro I, de la rotación plana, es la intersección, del eje (e), con el plano, siendo el ángulo $\vec{\varphi}$, el mismo para ambos giros.

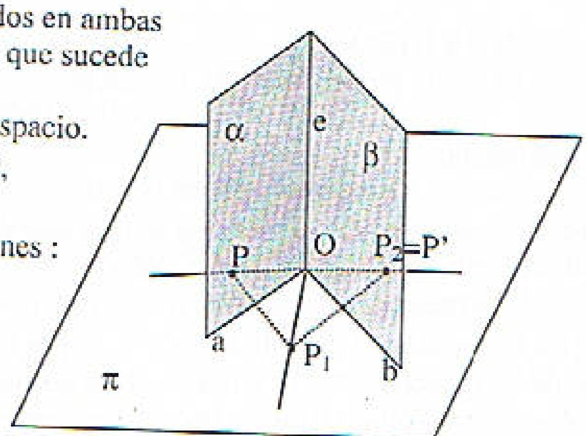
15.4 EJEMPLO

Demostrar que la composición de dos planos secantes α y β que determinan un diedro de arista (e), y tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \vec{\varphi}$, es una rotación de eje (e), y ángulo $2\vec{\varphi}$

Los puntos de la recta (e), son unidos en ambas transformaciones, veamos a continuación que sucede con los restantes puntos del espacio.
Consideremos un punto P cualquiera del espacio.
Sean π, el plano perpendicular al eje por P,
$\alpha \cap \pi = a$, $\beta \cap \pi = b$, y $\pi \cap e = \{O\}$.
Se consideran las siguientes transformaciones :

$P \xrightarrow{S_\alpha} P_1 \xrightarrow{S_\beta} P_2$ y $P \xrightarrow{R_{e,\vec{\varphi}}} P'$

Se demostrará que $P' = P_2$.



❖ En la composición de las simetrías especulares, los puntos , P, P_1 y P_2 deben pertenecer a un plano perpendicular a α y β, por lo que estan incluidos en π, cumpliendose además que $\widehat{POa} = \widehat{aOP_1}$ y $\widehat{P_1Ob} = \widehat{bOP_2}$. Como $\widehat{aOP_1} + \widehat{P_1Ob} = \widehat{a,b} = \vec{\varphi}$ ya que a,b es un rectílineo del diedro $\widehat{\alpha,\beta}$, se cumplirá que $\widehat{POP_2} = 2\vec{\varphi}$.
Por transitiva de la congruencia también se cumple que $\overline{OP} = \overline{OP_2}$.

- Así mismo en la rotación, se puede afirmar que P, O, y P', pertenecen a el plano π, perpendicular al eje. Además $\widehat{POP'} = 2\varphi$, y $\overline{OP} = \overline{OP'}$, por lo que, P' debe coincidir con P_2.

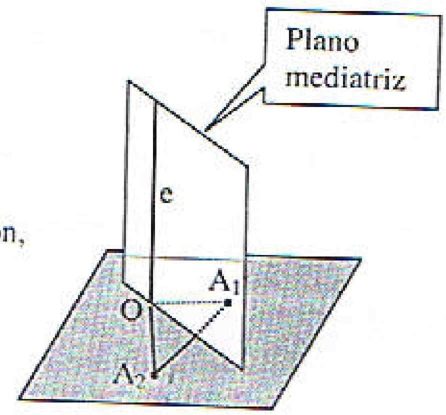
Considerando que la rotación es una isometría directa y que la composición de dos simetrías especulares, también es directa, (pues al invertir el sentido en el espacio dos veces, este permanece invariante), se concluye que $R_{e,\vec{\varphi}} = S_\beta \circ S_\alpha$

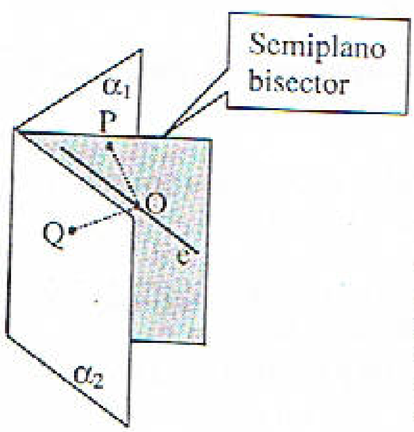
15.5 DETERMINACION DEL EJE Y ANGULO DE GIRO

El eje de giro, es la intersección del plano mediatriz del segmento determinado por un punto y su imagen , con el semiplano bisector del diedro determinado por dos semiplanos y sus semiespacios correspondientes.

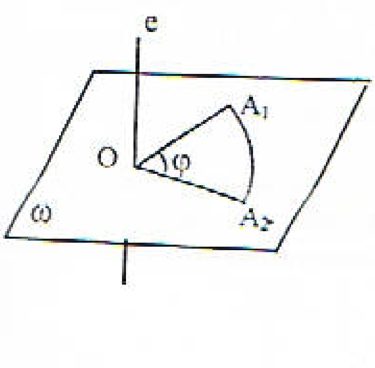
Sean dos cuaternas $(A_1, \overline{A_1x_1}, \alpha_1, E_1)$ y $(A_2, \overline{A_2x_2}, \alpha_2, E_2)$ que se corresponden en la rotación $R_{e,\vec{\varphi}}$.

- Para todo punto O del eje se verificará que $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, pues O es unido en la transformación, de donde se puede afirmar que O, pertenece al plano mediatriz del segmento $\overline{A_1A_2}$.





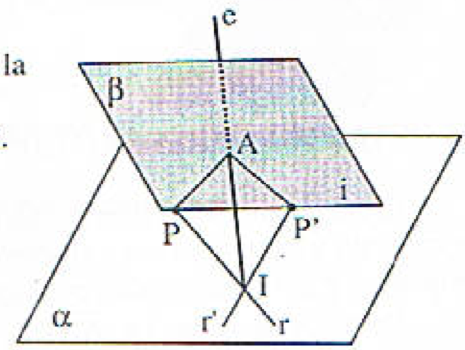
- Si desde cualquier $O \in e$, se trazan las perpendiculares a los semiplanos α_1 y α_2, determinando los puntos de intersección P y Q se cumplirá que Q es la imagen de P, en el giro (por conservarse la perpendicularidad entre rectas y planos , y ser el punto O, unido), por lo que, $\overline{OP} = \overline{OQ}$, y como $d(O,\alpha_1) = \overline{OP}$ y $d(O,\alpha_2) = \overline{OQ}$, se verificará que O equidista de α_1 y α_2 , o sea, que dicho punto pertenece al semiplano bisector determinado por estos semiplanos con sus semiespacios correspondientes .



- El ángulo de giro $\vec{\varphi}$ queda determinado por el ángulo $A_1\widehat{O}A_2$, *siendo el punto O, la intersección, del eje* hallado anteriormente con el plano ω perpendicular a él, y que incluye a los puntos correspondientes.

15.6 EJEMPLO

Dados un plano α, y una recta (e), que lo corta en I , hallar dos rectas (r) y (r'), incluidas en α, con I perteneciente a (r), tal que (r') sea la imagen de (r), en el giro $R_{e,\vec{\varphi}}$, siendo el ángulo $\vec{\varphi}$ dado.



Como el punto I, pertenece al eje (e), y a la recta (r), debe pertenecer también a la recta (r'), pues dicho punto es unido en la transformación. Se determinará otro punto $P \in r$, y su imagen P'. Considerando que todo punto y su imagen, en los giros del espacio, se encuentran en un plano perpendicular al eje, se traza por un punto A cualquiera del eje, un plano perpendicular a éste. Sea β y $\beta \cap \alpha = i$.
A continuación, se construye en el plano β, el triángulo isósceles $\widehat{PAP'}$, con P y P' pertenecientes a (i), $\widehat{PAP'} = \vec{\varphi}$, y $\overline{AP} = \overline{AP'}$. En estas condiciones, P' será la imagen de P, en la rotación $R_{e,\vec{\varphi}}$, y en consecuencia, la recta r = PI, incluida en α, tendrá como imagen a r' = P'I, también incluida en α.

16. EJERCICIOS

1) Dado un cubo ABCDEFGH, hallar nueve planos de simetría y nueve ejes de simetría, que lo mantengan globalmente invariante.

2) Dado un octaedro regular ABCDEF, hallar nueve planos de simetría y nueve ejes de simetría del mismo.

3) a) Dado un cubo ABCDEFGH, hallar la traslación $T_{\vec{u}} = T_{\overrightarrow{AE}} \circ T_{\overrightarrow{FG}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$
Indicar módulo del vector, en función de la arista.
b) Hallar la imagen del punto C, en la composición $T_{\overrightarrow{FA}} \circ T_{\vec{u}} \circ T_{\overrightarrow{GE}}$.

4) a) Hallar el eje y ángulo de giro de la rotación $R_{e,\vec{\varphi}}$, que en un cubo ABCDEFGH , transforma a la semirrecta $\overline{EF}$, en la op.($\overline{GF}$) , y al semiplano (EF,A), en el (FG,B).
b) Hallar la imagen del triángulo $\widehat{HEA}$, en la rotación.

5) Se consideran dos rectas perpendiculares (r) y (s), secantes en el punto O. Sea la figura $\mathscr{F} = a \cup b$. Hallar al menos tres rotaciones, tres simetrías axiales y tres simetrías especulares, que dejen globalmente invariante a $\mathscr{F}$.

6) Se consideran tres planos α, β y γ, perpendiculares dos a dos, con $\alpha \cap \beta = x$, $\alpha \cap \gamma = y$, $\beta \cap \gamma = z$, y $x \cap y \cap z = \{O\}$.
a) Demostrar que $S_x = S_\beta \circ S_\alpha$
b) Demostrar que $S_z = C_O \circ S_\alpha$

7) *Se considera un plano α . y dos puntos A y C exteriores y fijos.*
Se construyen los paralelogramos ABCD , con $B \in \alpha$, variable
Hallar el lugar geométrico de D, al variar B.

8) Se considera un plano α, y un segmento $\overline{AC}$ exterior y paralelo a α.
Se construyen los rombos ABCD, con B variable en α.
Hallar el lugar geométrico de D al variar B.

9) Se considera un cubo ABCDEFGH. Sobre la cara ABFE, se toma un punto P variable. Por P se traza una perpendicular a la recta BF, que la corta en M, y por M, una perpendicular (r) a BF, tal que $\widehat{PMr} = 45°$. Sea $Q \in r$, interior al cubo, con $\overline{PM} = \overline{QM}$. Hallar el lugar geométrico de Q, al variar P.

10) Sean dos rectas que se cruzan (r) y (s), y la figura $\mathscr{F} = r \cup s$.
Hallar tres ejes de simetría de la figura $\mathscr{F}$
Sugerencia : considere la perpendicular común.

11) Dados un plano α y dos puntos exteriores A y B, situados en distintos semiespacios respecto de α, hallar un punto $P \in \alpha$, tal que la distancia $\overline{PA} - \overline{PB}$ sea máxima. Sugerencia : Considere la simetría especular S_α .

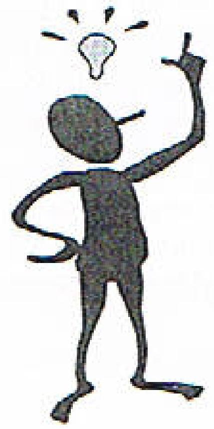
12) Dados un plano α, y dos puntos A y B situados en igual semiespacio, respecto de éste, hallar un punto $P \in \alpha$, tal que $\overline{PA+PB}$, sea la mínima distancia posible.

13) Dados un plano α, un punto $P \in \alpha$, y una recta (e) que corta a α en I, hallar dos rectas (r) y (r'), incluidas en α, y el ángulo φ, para que se cumpla que (r') , sea la imagen de (r) en la rotación $R_{e,\vec{\varphi}}$, con $P \in r$, e $I \notin r$.

14) Sean dos rectas secantes (a) y (b) en O, y por O, la recta (e) perpendicular al plano determinado por (a) y (b). Por otro punto de (e), se trazan dos rectas (a') y (b'), paralelas a (a) y (b). Probar que $S_a \circ S_{a'} = S_b \circ S_{b'}$.

15) Sean dos rectas secantes (a) y (b) en O, y por O la recta (e), perpendicular al plano determinado por (a) y (b). Sea $\vec{\varphi} = \widehat{a,b}$. Probar que $S_b \circ S_a = R_{e,2\vec{\varphi}}$.

16) Dados un punto O, y un vector $\vec{u}$, probar que para cualquier punto P se cumple que $T_{\vec{u}} \circ C_O = C_{O'}$, siendo $O' = T_{\vec{u}/2}(O)$.



SOLUCIONES

CAPITULO 0 REVISION

0.2 ANGULOS

1. $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{C} = 80°$
2. *$\widehat{CFO} = \widehat{CFA} = \widehat{CDE} = 90°$. * $\widehat{FOC} = \widehat{FCA}$ (complementarios del $\widehat{FCO}$), y $\widehat{FCA} = \widehat{CED}$ (ángulos correspondientes en las paralelas)
   * El tercer ángulo debe ser el mismo en los tres triángulos.
3. $\widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 90°$, $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90°$.
   Además como $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{DAB}$, y $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{CBD} + \widehat{CAD} = 180°$
4. Sean $\overline{Ax}$ bisectriz del ángulo $\widehat{A}$, $\overline{By}$ bisectriz del $\widehat{B}$, $x \cap y = \{M\}$.
   Si $\widehat{MAB} = \alpha \Rightarrow \widehat{ABM} = 90° - \alpha$ y en consecuencia $\widehat{AMB} = 90°$
5. $\widehat{bQM} = \widehat{OMN} = \widehat{MON}$ (alternos internos y bisectriz)
6. $\widehat{AQC} = 73°$

7. $\widehat{AED} = \widehat{EDC}$ y $\widehat{EDC} = \widehat{ADE}$
   $\widehat{ADE} = \widehat{EFB}$ y $\widehat{AED} = \widehat{FEB}$.
8. $\widehat{BIC} = 115°$
9. $\widehat{BOC} = 2\alpha$ $\qquad \widehat{BIC} = 90° + \alpha/2$
   $\widehat{BHC} = 180° - \alpha$
10. $\widehat{AFB} = 95°$ y $\widehat{AEB} = 55°$
11. $\widehat{COD} = 100°$
12. $\widehat{APB} = 72°$

0.3 INTERSECCIONES DE LUGARES GEOMETRICOS

1. a) $\mathscr{C}_{A,4}$ b) $\mathscr{C}_{A,4} \cap \mathscr{C}_{B,3} = \{P,Q\}$
2. a) $\mathscr{C}_{A,4} \cap \mathscr{C}_{B,2} = \{M\}$, $M \in AB$ b) $\mathscr{C}_{A,3} \cap \mathscr{C}_{B,1} = \varnothing$
   c) $\mathscr{C}_{A,8} \cap \mathscr{C}_{B,2} = \{P\}$, $A \prec B \prec P$ d) $\mathscr{C}_{A,10} \cap \mathscr{C}_{B,2} = \varnothing$
   e) * $r + r' = 6 \Rightarrow$ 1 punto solución * $r - r' = 6 \Rightarrow$ 1 punto solución
   * $r + r' < 6 \Rightarrow$solución vacía $r - r' > 6 \Rightarrow$ 2 puntos solución
   * $r + r' > 6$ y $r - r' < 6 \Rightarrow$ 2 puntos solución
   * $r + r' > 6$ y $r - r' > 6 \Rightarrow$ solución vacía

3. Los puntos son la intersección de la circunferencia $\mathscr{C}_{A,4}$, con las paralelas a (r) a una distancia igual a 3 cm.
4. Los puntos solución son la intersección de la bisectriz del ángulo con las paralelas al lado a una medida k.
5. La bisectriz queda determinada por las intersecciones de dos pares de rectas paralelas a igual distancia de los lados.
6. Los puntos solución son la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$, con las paralelas a (r) a una distancia igual a 4.
7. Los puntos solución son la intersección de la circunferencia $\mathscr{C}_{P,3}$, con la paralela media entre (r) y (s).
8. Incentro del $\widehat{AMN}$.
10. $\{P\} = \mathscr{A}_{\overline{AB},75°} \cap \mathscr{A}_{\overline{BC},60°}$
11. Los puntos solución son la intersección de las paralelas a la recta AB a 2 cm. con los arcos capaces $\mathscr{A}_{\overline{AB},45°}$, uno en cada semiplano de borde AB.
12. Los puntos solución son la intersección de la circunferencia $\mathscr{C}_{A,2}$, con los arcos capaces $\mathscr{A}_{\overline{AB},60°}$, (uno en cada semiplano).

0.4 CIRCUNFERENCIAS

1. El centro es la intersección de las mediatrices.
2. El centro es la intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ con la recta (s).
3. a) $O = mz\,(\overline{AB}) \cap \mathscr{C}_{A,r}$
   b) El centro es la intersección de la paralela a (t), a una distancia igual a **r**
   c) El centro es la intersección de las paralelas a (s) y (t), a una distancia igual a **r.**
4. El centro es la intersección de la paralela media entre (a) y (b), con la circunferencia de centro P y radio igual a la mitad de la distancia entre las paralelas.
5. El centro O queda determinado por la intersección de la circunferencia $\mathscr{C}_{O',r+r'}$ con $\mathscr{C}_{O'',r+r''}$.
6. La recta de los centros corta a cada circunferencia en dos puntos. La circunferencia solución es la de diámetro mayor determinado por un punto de cada circunferencia.
7. $\mathscr{C}_{\overline{OP}} \cap \mathscr{C}_{O,r} = \{T',T''\}$. Las tangentes son PT' y PT''
8. Las tangentes son las paralelas a la recta de los centros, a una distancia igual al radio
9. Se construye : i) $\mathscr{C}_{O',r'-r}$ ii) Desde O'', se traza la tangente (t_0) a la circunferencia anterior, y se ubica el punto de tangencia T_0 iii) $O'T_0 \cap \mathscr{C}' = T'$ iv) Por O'' se traza la paralela a O'T', que corta a $\mathscr{C}''$ en T'' v) la recta tangente es T'T''.
10. El centro $O = mz\,(\overline{PT}) \cap TO'$
11. Probar que $\widehat{ONA} = 90°$

0.5 TRIANGULOS

1. Construir :
   a) i) $\overline{BC}$ y M. ii) $A = \mathscr{C}_{B,c} \cap \mathscr{C}_{M,m_A}$
   b) i) $\overline{AB}$ ii) $\mathscr{C}_{\overline{AB}}$ iii) $\mathscr{C}'_{A,h_A}$ iv) $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = H$ v) Se ubica C, $\overline{BC} = a$
   c) i) $\overline{BC}$ ii) $\mathscr{C}_{M,m_A}$ iii) (p) , paralela a BC a una distancia h_A iv) $A = \mathscr{C} \cap p$
   d) i) $\overline{BC}$ ii) $\mathscr{A}_{\overline{BC},60^\circ}$ iii) $\mathscr{C}_{B,c}$ iv) $A = \mathscr{C} \cap \mathscr{A}$
   e) i) $\overline{BC}$ ii) $\mathscr{A}_{\overline{BC},60^\circ}$ iii) $\overline{Bx}$, $\widehat{CBx} = 75°$ iv) $A = \mathscr{A} \cap \overline{Bx}$
   g) i) $\widehat{ACM}$ ii) $B = CH \cap \mathscr{A}_{\overline{AC},75^\circ}$
   h) i) $\widehat{ACD}$, $\overline{AD} = 2\,m_A$, $\overline{AC} = b$, $\overline{CD} = c$, M punto medio de $\overline{AD}$
   ii) Sobre CM se ubica B , tal que $\overline{BM} = \overline{MC}$
   i) i) $\overline{BC}$ ii) $\mathscr{C}_{M,m_A}$ iii) $\overline{Bx}$, $\widehat{CBx} = 75°$ iv) $A = \mathscr{C} \cap \overline{Bx}$
   j) i) $\overline{VA}$ ii) $\overline{Ax}$, $\widehat{VAx} = 30°$ iii) $\mathscr{A}_{\overline{AV},75^\circ}$ iv) $B = \overline{Ax} \cap \mathscr{A}$ v) $\overline{Ay}$, $\widehat{VAy} = 30°$
   vi) $C = BV \cap \overline{Ay}$
   k) i) $\widehat{xAy} = 60°$ ii) sobre la bisectriz del $\widehat{A}$ se ubica V
   iii) en Ay se ubica C, $\overline{AC} = b$ iv) $B = \overline{Ax} \cap CV$
   l) i)) $\widehat{xAy} = 60°$ ii) sobre la bisectriz del $\widehat{A}$ se ubica V iii) $C = \mathscr{A}_{\overline{AV},45^\circ} \cap \mathscr{C}_{A,b}$
   iv) $B = \overline{Ax} \cap CV$
   m) i) $\widehat{AVH}$ ii) $\mathscr{C}_{A,c}$ iii) $B = \mathscr{C} \cap VH$ iv) $\overline{Ay}$, $\widehat{BAV} = \widehat{VAy}$ v) $C = \overline{Ay} \cap VH$
   n) i) $\widehat{AMH}$ ii) $\mathscr{C}_{A,c}$ iii) $B = \mathscr{C} \cap MH$ iv) se ubica $C \in BM$, $\overline{BM} = \overline{MC}$
   o) $c = (b + c) - b$
   p) $c = b - (b-c)$
   q) $b = c + (b-c)$, $a = (a+b) - b$
   r) $A = 180° - (B+C)$, $A = p \cap \mathscr{A}_{BC,60^\circ}$
2. $\overline{CT'} = \overline{CA} + \overline{AT'}$ $\overline{CT''} = \overline{CB} + \overline{BT''}$. Como $\overline{CT'} = \overline{CT''}$, $\overline{AT'} = \overline{AT}$, $\overline{BT} = \overline{BT''}$ y $\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{BT}$ entonces $\overline{CA} + \overline{CB} + \overline{AB} = 2\,\overline{CT'}$
3. Aplicando el ejercicio anterior se construyen : i) el segmento $\overline{CT'}$, $\overline{CT'}$ = Perim. / 2 ii) (t'') tal que $\widehat{t'Ct''} = \widehat{C}$ iii) $T'' \in t''$, $\overline{PT''} = \overline{PT'}$ iv) la circunferencia $\mathscr{C}$ v) la paralela (p) a AC a una distancia h_B vi) $B = p \cap t''$ vii) por B la tangente (t) viii) $A = t \cap t'$
4. Igual al ejercicio 3 , hasta el paso iv)
   v) se construye $T \in \mathscr{C}$, tal que $\widehat{TOT'} = \widehat{A}$
   vi) por T se traza la tangente (t) a $\mathscr{C}$
   vii) $A = t \cap t'$ $B = t \cap t''$
5. Sea $\widehat{ABC}$ rectángulo en A , y M,N y P puntos de tangencia en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente , y r el radio.
   $\overline{AB} = \overline{MB} + r$, $\overline{AC} = \overline{PC} + r$, $\overline{PC} = \overline{NC}$, $\overline{MB} = \overline{NB}$ $\Rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2r$
6. Se calcula BC = (Perim.- 2r) / 2 y AB + AC = (Perim.+ 2r) / 2
   Se construye el triángulo auxiliar BCD, con $D = 45°$, $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC}$
   Por C se traza la perpendicular a BD que la corta en A.
7. $\overline{OC}$ es mediana fija . $G \in \overline{OC}$, tal que $\overline{OG} = 1/3\ \overline{OC}$
8. Sea m la mediatriz del $\overline{AB}$, entonces $M \in m$, $m \perp AB$. Como $AB \parallel NP$ (paralela media), $m \perp NP$, entonces (m) contiene a la altura h_M, en el triángulo MNP. Se razona igual para el resto.

0.6 CUADRILATEROS

1. Construir las diagonales perpendiculares en su punto medio.
2. a) Construir en primer lugar el triángulo $\widehat{ABC}$
   b) Construir en primer lugar el triángulo $\widehat{ABD}$
   c) Construir en primer lugar el triángulo $\widehat{ABD}$
3. a) Construir : i) $\overline{BC}$ ii) Bx , $\widehat{CBx} = 30°$ iii) por C se traza p || x iv) D = $\mathscr{C}_{B,6} \cap$ p
   v) Por D la paralela a BC corta a (x) en A.
   b) Sea O el centro. Construir en primer lugar el triángulo $\widehat{ABO}$.
   c) Construir en primer lugar el triángulo $\widehat{ABC}$.
4. a) Construir: i) $\widehat{ACD}$ ii) $\overline{Cx}$, $\widehat{DCx} = 60°$ iii) Por A , la recta p || CD iv) B = p ∩ x
   b) i) el triángulo auxiliar $\widehat{BCB'}$, horario, con $\overline{B'C} = 2$ cm , $\widehat{B'} = 60°$ y $\widehat{B} = 50°$
   ii) Sobre $\overline{CB'}$ se ubica D, $\overline{CD} = 5$ cm. iii) Se construye A, cuarto vértice del paralelogramo BB'DA
   c) i) el triángulo auxiliar $\widehat{BCB'}$, horario, con $\overline{BB'} = 3$ cm ., $\overline{BC} = 4$ cm y $\overline{B'C} = 3$ cm . ii) Sobre $\overline{CB'}$ se ubica D, $\overline{CD} = 6$ cm.
   iii) Se construye A, cuarto vértice del paralelogramo BB'DA
5. BQHP, CQHR, APHR, BCRP, BQRA, APQC.
6. a) C ∈ mz ($\overline{NQ}$)
   b) Probar que $\widehat{NCP} = 90°$ y $\widehat{NOP} = 90°$,
   NCOP inscriptible en circunferencia de diámetro $\overline{NP}$.
7. a) $\widehat{BIA} = \widehat{BOA} = 90°$ ⇒ BIOA inscriptible en circunferencia de diámetro $\overline{AB}$
   b) $\widehat{DIH} = \widehat{DOH} = 90°$ ⇒ OHID inscriptible en circunferencia de diámetro $\overline{DH}$
8. a) $\widehat{PSA} = \widehat{PRA} = 90°$ $\widehat{ASR} = \widehat{APR}$, inscritos de cuerda $\overline{AR}$
   b) $\widehat{PSC} = \widehat{PTC} = 90°$ $\widehat{TSC} = \widehat{TPC}$, inscritos de cuerda $\overline{TC}$
   c) $\widehat{PTB} = \widehat{PRB} = 90°$ $\widehat{TPR} = \widehat{CPA}$, suplementarios del ángulo $\widehat{B}$.
9. $\widehat{PMO} = \widehat{PNO} = 90°$ ⇒ OMNP inscriptible en circunferencia de diámetro $\overline{OP}$.
10. a) $\widehat{JCB} = 45°$, $\widehat{BCA} = 90°$, $\widehat{ACI} = 45°$ ⇒ $\widehat{JCI} = 180°$
    b) IAKC inscrito en circunferencia de diámetro $\overline{AC}$. ($\widehat{AIC} = \widehat{AKC} = 90°$)
    c) CKBJ inscrito en circunferencia de diámetro $\overline{BC}$. ($\widehat{CKB} = \widehat{CJB} = 90°$).

0.7 TRIGONOMETRIA PERIMETROS Y AREAS

1. $l = \frac{\sqrt{2}}{2}d$
2. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$
3. $d = l$, $d' = \sqrt{3}.l$
4. $l = \sqrt{3}.r$ $h = \frac{3}{2}r$
5. a) $\overline{AD} = \sqrt{3}x$, $\overline{BE} = 2\sqrt{3}x$, $\overline{DE} = 2.x$, $\overline{AE} = \sqrt{13}.x$
   b) $P = (3+3\sqrt{3}).x$ $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ c) x = 2/3

6. a) $\overline{AB} = r$ b) $\overline{AB} = \sqrt{2}.r$ c) $\overline{AB} = \sqrt{3}.r$

7. $l = r$ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}.r$

8. $\cos.\alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

9. $x = \sqrt{7}$ cm P. $= 6\sqrt{7}$ cm A $= 7\sqrt{3}$ cm

10. $\overline{AC} \approx 14{,}01$ $\overline{BC} \approx 17{,}76$ $\overline{AB} \approx 20{,}62$ $A \approx 122{,}48 \text{ cm}^2$

11. $P = 8\sqrt{2}\,\pi$ cm $A = 32\,\pi \text{ cm}^2$

12. $A = (\sqrt{3}/2).x^2$

13. El área de cada región es $\frac{r^2}{3}\pi$

14. a) $(16 - 4\pi)\text{ cm}^2$ b) $(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{16}\pi)\text{ cm}^2$

Capítulo 2 ISOMETRIAS EN EL PLANO

1. Sean $X' = f(X)$ e $Y' = f(Y)$. Si X',Y' y O alineados, aplicar suma de segmentos. y deducir que $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$
   Si estos puntos no están alineados, probar que $\widehat{OXY} = \widehat{OX'Y'}$ (L.A.L.) entonces $\overline{XY} = X'Y'$
2. Análogo al ejercicio anterior.
3. Si $\overline{OP'} < 3$, entonces no existe P tal que $g(P) = P'$

4.a)

o	f	g	h	i	j	k
f	i	k	j	f	h	g
g	j	i	k	g	f	h
h	k	j	i	h	g	f
i	f	g	h	i	j	k
j	g	h	f	j	k	i
k	h	f	g	k	i	j

b) $f^{-1} = f,\ g^{-1} = g,\ h^{-1} = h,\ i^{-1} = i,\ j^{-1} = k,\ k^{-1} = j$

c) El neutro es **i** . Asociativa $\Rightarrow (f \circ g) \circ h = k \circ h = g$

$f \circ (g \circ h) = f \circ k = g$

d) $f \circ g = k,\ g \circ f = j \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

5. a) $\overline{OM}$ común, $\overline{MB} = \overline{MC}$, $\overline{OB} = \overline{OC}$ (L.L.L.)
   b) $\overline{OP}$ común , $\overline{PB} = \overline{PC}$, $\widehat{BPO} = \widehat{CPO}$ (L.A.L.)
   c) $\overline{BC}$ común , $\widehat{BCC_1} = \widehat{CBB_1}$, $\widehat{B_1CB} = \widehat{C_1BC}$ (A.L.A.)
6. $\widehat{NDC} = \widehat{CBM}$, $\overline{DC} = \overline{CB}$, $\widehat{BCM} = \widehat{DNC}$ (A.L.A.)
7. $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{MB} = \overline{AN}$, $\widehat{OAN} = \widehat{OBM}$ (L.A.L.)
   b) a) $\overline{CO} = \overline{MO}$, $\overline{DO} = \overline{OB}$, $\widehat{COD} = \widehat{MOB}$ (L.A.L.)
   b) $\widehat{CC_1O} = \widehat{DD_1O}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$, $\widehat{COC_1} = \widehat{ODD_1}$ (A.L.A.)
9. a) $\overline{AM} = \overline{MD}$, $\overline{MC} = \overline{BM}$, $\widehat{BMA} = \widehat{CMD}$
   b) $\overline{AD} = \overline{A'D'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ (L.L.L.)
   c) Probar que $\overline{MC} = \overline{M'C'}$ y que $\overline{BM} = \overline{B'M'}$
10. a) $\widehat{FDE} = 60°$, $\overline{DF} = \overline{DE}$ $\Rightarrow$ $\widehat{FDE}$ equilátero.
    $\widehat{ECG} = 60°$, $\overline{EC} = \overline{GC}$ $\Rightarrow$ $\widehat{GCE}$ equilátero.
    b) $\widehat{AFE} = 150°$, $\widehat{AFE}$ isósceles $\Rightarrow$ $\widehat{FAE} = 15° \Rightarrow \widehat{EAB} = 60°$
    Análogo para $\widehat{EBA} = 60° \Rightarrow \widehat{AEB}$ equilátero
11. Probar que $\widehat{PAO} = \widehat{PBO}$ (L.L.A.) $\Rightarrow$ $\overline{PA} = \overline{PB}$
12. Probar que $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$ (L.A.L.)
    Entonces $\overline{BB'} = \overline{CC'}$. Igual para $\widehat{ABA'} = \widehat{CBC'}$, de donde $\overline{AA'} = \overline{CC'}$
13. Cuadrado. Probar que $\widehat{AMQ} = \widehat{BNM} = \widehat{CNP} = \widehat{DPQ}$

Capítulo 3 SIMETRIA AXIAL

1. d) La recta (r) es mediatriz de $\overline{AB}$, $\overline{ED}$ y $\overline{FC}$ $\Rightarrow$ (r) es eje de simetría
   e) Hexágono regular
2. $S_x(B) = D$. El lugar geométrico de B es $\overline{O'z} = S_x\,(\overline{Oy})$
3. Suponer la figura resuelta $D' = S_{AC}(D)$ y $B' = S_{AC}(B)$
   Se construyen : i) $\widehat{BCD'}$, $\overline{BD'} = \overline{AD}-\overline{AB}$ y $\overline{CD'} = \overline{CD}$ ii)Sobre $\overline{D'B}$ se ubica A
   iii) $D = S_{AC}(D')$ (Se supuso $\overline{AD} > \overline{AB}$)
4. Se construyen : i) $b' = S_a(b)$, ii) $b' \cap \mathscr{C} = D$, iii) $B = S_a(D)$, iv) $BD \cap a = \{O\}$
   v) se ubican A y C tal que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$
5. Se construyen : i) $b' = S_m(b)$, ii) $\{A\} = b' \cap a$ iii) $B = S_m(A)$
6. $S_t(A) = C$. El lugar geométrico de A es $\mathscr{C}' = S_t(\mathscr{C})$
7. Se construyen : i) $P' = S_x(P)$ y $Q' = S_x(Q)$, ii) $PP' \cap QQ' \cap x = A$
8. Como $\overline{XB} = \overline{XC}$ entonces $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AC}$
   Para $P \neq X \Rightarrow \overline{AP}+\overline{PB} = \overline{AP}+\overline{PC}$ y $\overline{AP}+\overline{PC} > \overline{AC}$
9. Perímetro - $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Sea $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$
   Se construyen : i) el triángulo $\widehat{ABD}$, ii) la mediatriz de $\overline{BD}$, iii) $mz \cap AD = \{C\}$
10. Sean $\overline{AC} = \overline{AB}$, $P \in \overline{BC}$, $d(P,AB) = \overline{PM}$ y $d(P,AC) = \overline{PN}$
    Se simetriza con eje BC. Sea $M' = S_{BC}(M)$, entonces M', P y N alineados y $\overline{M'P} + \overline{PN} = \overline{MP} + \overline{PN}$. Se cumple que $M'N \perp AC$ y $M'N \perp A'B$, por lo cual $\overline{M'N}$ es constante e igual a la altura h_B o h_C
11. Sea el punto P interior y M,N y Q los pies de las perpendiculares Por P se traza una paralela (p) al lado $\overline{BC}$. $p \cap AB = \{X\}$ $p \cap AC = \{Y\}$
    $\overline{PM}+\overline{PN} = h'$ (altura del $\widehat{AXY}$) $h'+\overline{PQ} = h$ (altura del $\widehat{ABC}$)$\Rightarrow \overline{PM} + \overline{PN} + \overline{PQ} = h$

Capítulo 4 SIMETRIA CENTRAL

1. Por P se traza p $\parallel$ MN. Por M se traza m $\parallel$ NP. Por N se traza n $\parallel$ MP
   Los puntos de corte de m, n y p determinan el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$
2. $B = C_M(A)$. Sea $x' = C_M(x)$. $\{B\} = x' \cap Oy$. $A = C_M(B)$
3. a) $D = C_O(B)$ y $C = C_O(A)$
   b) $r' = C_O(r)$
   c) Se construye el arco capaz $\mathscr{A}_{\overrightarrow{AC},60°}$ $\Rightarrow$ $D = \mathscr{A} \cap r'$ y $B = C_O(D)$
4. $D \in \mathscr{C}' = C_A(\mathscr{C})$
5 Sea $\mathscr{C}_1 = C_M(\mathscr{C})$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}' = \{M, A\}$, AM es la recta solución
6. $\overline{MB} = \overline{NB}$, $\overline{MB} = \overline{NP}$ y además $\overline{MP} = \overline{NB}$
7. a) BG $\parallel$ CR y GC $\parallel$ RB ,
   b) i) Considerar que $\overline{BR} = \overline{GC}$ y la propiedad del baricentro en la mediana $\overleftrightarrow{MC}$
   ii) Considerar que $\overline{GR} = 2\,\overline{GN}$
8. Construir el triángulo $\overset{\frown}{GBR}$. N es punto medio de $\overleftrightarrow{GR}$, $\overline{GR} = 2/3\ \overline{AN}$,
   $\overline{BR} = 2/3\ \overline{MC}$, $\overline{GB} = 2/3\ \overline{BP}$. Se construyen $C = C_N(B)$ y $A = C_N(R)$
9. a) Como BC $\parallel$ MN y
   BC $\parallel$ PS , entonces MN $\parallel$ PS.
   b) $\overline{PS} = 2\,\overline{BC}$, $\overline{NR} = 2\,\overline{AC}$ y $\overline{MQ} = 2\,\overline{AB}$,
   $\overline{BC} = \overline{MN}$, $\overline{AC} = \overline{QP}$, $\overline{AB} = \overline{RS}$
10. AB $\parallel$ PP_2 y $\overline{AB} = \overline{PP_2}/2$,
    AB $\parallel$ P_1P_3 y $\overline{AB} = \overline{P_1P_3}/2$, entonces
    $\overline{PP_2} = \overline{P_1P_3}$ y $PP_2 \parallel P_1P_3$ de donde $PP_1P_2P_3$ es paralelogramo.
11. $\mathscr{C}' = C_O(\mathscr{C})$.

Capítulo 5 TRASLACION

1. $P = T_{AB}(Q)$. Se construyen: i) $r_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(r)$, ii) $P = r_1 \cap \mathscr{C}$, iii) $Q = T_{\overrightarrow{BA}}(P)$
2. Se construyen: i) $a_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(a)$, con AB $\parallel$ c , ii) $B = a_1 \cap b$, iii) $A = T_{\overrightarrow{BA}}(B)$
3. $a\widehat{O}x = P\widehat{O}Q$ y $a\widehat{O}x \cong O\widehat{P}Q$ $\Rightarrow$ $P\widehat{O}Q = O\widehat{P}Q$
4. a) i) Se construye el $\overset{\frown}{ABC}$, ii) Se ubica $D' \in BC$, $D'B = 4$, iii) $D = T_{\overrightarrow{BA}}(D')$
   b) i) Se construye el $\overset{\frown}{ABC}$, ii) por A se traza p $\parallel$ BC iii) por C se traza $\overleftrightarrow{Cx}$, tal que
   $B\widehat{C}x = 45°$, iv) $x \cap p = D$
   c) i) Se construye $\overset{\frown}{BAD}$, ii) por B se traza la paralela (p) a AD , iii) $C = p \cap \mathscr{C}_{D,3}$
5. a) $\mathscr{C}_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$
   b) $A\widehat{M}B = M\widehat{B}C$ y $A\widehat{M}B$ es constante
6. a) Probar que $\overleftrightarrow{AB} = A'B'$ y que AB $\parallel$ A'B'
   b) $\mathscr{C}_0 = T_{\overrightarrow{AA'}/2}(\mathscr{C})$
7. $D \in r'$, tal que $r' \cong T_{\overrightarrow{BC}}(r)$
8. Como $\overset{\frown}{AA'B} = \overset{\frown}{PMN}$, entonces $\overleftrightarrow{MN} = \overleftrightarrow{BA'}$
   Además como ABCA' es paralelogramo , entonces $\overline{BA'} = 2m_b$
9. Se construye el triángulo $\overset{\frown}{MNQ}$, con $\overline{MN} = 2\,m_b$, $\overline{NQ} = 2\,m_a$, y $\overline{QM} = 2m_c$
   Por un punto G (baricentro del $\overset{\frown}{ABC}$) se trazan paralelas a los lados del $\overset{\frown}{MNP}$, y sobre ellas se construye el $\overset{\frown}{ABC}$.

Capítulo 6 ROTACION

2. Se construyen: i) un punto $B \in b$ cualquiera , ii) la recta $a' = R_{B,+90°}(a)$, iii) el punto $C = a' \cap c$, iv) el punto $A = R_{B,-90°}(C)$, v) el punto D.
3. Se construyen: i) la circunferencia $\mathscr{C}_1 = R_{B,+90°}(\mathscr{C})$ ii) $C_i = \mathscr{C}'' \cap \mathscr{C}_1$ iii) el punto $A = R_{B,-90°}(C)$, iv) el punto D , cuarto vértice del cuadrado.
4. $C \in \mathscr{C}'$ tal que $\mathscr{C}' = R_{A,-90°}(\mathscr{C})$.
5. $D \in r'$, tal que $r' = R_{A,-120°}(r)$
6. $M = R_{A,+60°}(P)$. Sea $x = BC$. Se construyen: i) $x' = R_{A,+60°}(x)$, ii) el punto $M = x' \cap CD$, iii) el punto $P = R_{A,-60°}(M)$
7. a) $\{O\} = mz(\overleftrightarrow{AC}) \cap bz(\widehat{BAC})$, $\alpha = -60°$
   b) $Q = R_{O,-60°}(P) \Rightarrow \overline{OP} = \overline{OQ}$ y $\widehat{POQ} = 60°$
   c) $A \to C = A'$, $B \to A = B'$, $C \to C'$
   d) $\widehat{BOB'} = \widehat{B'OA'} = \widehat{A'OC'} = 60°$, entonces $\widehat{BOC'} = 180°$
   $\widehat{BAC'} = \widehat{BAC} - \widehat{A'B'C'} = 120° - 30° = 90°$
8. El centro O es el punto medio de $\overleftrightarrow{BC}$, $\varphi = -120°$
9. a) $D \in \mathscr{C}'$, tal que $\mathscr{C}' = R_{A,-90°}(\mathscr{C})$
   b) Se construyen : i) la circunferencia $\mathscr{C}'$, ii) el arco capaz $\mathscr{A}$ de segmento $\overleftrightarrow{AO}$ y ángulo 60°, iii) el punto $D = \mathscr{A} \cap \mathscr{C}'$, iv) el punto $B = R_{A+90°}(D)$.
10. P varía en la circunferencia $\mathscr{C}_{O,2}$

Capítulo 7 ANTITRASLACION

1. a) El eje (e) es la paralela media entre las rectas AB y DE. El vector es $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
   b) $M = F$, $N = C_F(E)$, $P = C_F(B)$
   c) $e_1 = FD$, $\vec{v} = \overrightarrow{FD}$
   d) Área $= 4x^2$, Perímetro $= (4 + \sqrt{2} \pm \sqrt{10}).x$
2. Se construyen: i) M punto medio de OO_1, ii) la circunferencia $\mathscr{C}_{O,4}$, iii) el arco capaz $\mathscr{A}$ de segmento $\overline{OO_1}$ y ángulo 90°, iv) el punto $P = \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$
   El eje (e), es la paralela a la recta OP por M.
3. $C = At_{b,\overrightarrow{AB}}(A)$. Se construyen : i) la recta $a' = At_{b,\overrightarrow{AB}}(a)$, ii) un punto $C = a' \cap \mathscr{C}$ iii) el punto $B = S_b(C)$, iv) el punto $A = T_{\overrightarrow{BA}}(B)$
4. a) El eje queda determinado por los puntos medios de OO_1 y AA_1
   El vector queda determinado por las proyecciones de O y O_1 sobre el eje.
   b) P es el punto intersección entre la circunferencia y la perpendicular al eje por O situado a la mayor distancia de éste.
   c) La $d(Q,e) = (\sqrt{k^2 - u^2}\,)/2$ (Pitágoras).Se traza la paralela (p) al eje , a la distancia mencionada La intersección de (p) y $\mathscr{C}$ determina el punto Q
5. El lugar geométrico de C es el triángulo $\widehat{R'S'T'} = At_{e,\overrightarrow{AB}}(RST)$
6. a) El lugar geométrico es la unión de las paralelas a (e) a una distancia igual a 2
   b) Unión de paralelas a una distancia igual a $(\sqrt{|k^2 - u^2|}\,)/2$

Capítulo 8 COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE ISOMETRIAS

1. a) $T_{\overrightarrow{CA}}$ b) C_O c) C_O d) $R_{A,+90°}$ e) $T_{\overrightarrow{AC}}$ f) $T_{\overrightarrow{BC}}$ g) $At_{BD,\overrightarrow{BD}}$
   h) $At_{AB,\overrightarrow{AB}}$ i) S_{CD} j) $At_{e,\overrightarrow{BA}}$ $O \in e$, $e \parallel AB$ k) $R_{C,+90°}$
2. $R_{C,+120°}$
3. a) $f = At_{AB,2\overrightarrow{BA}}$
   b) $g = R_{E,-60°}$, con $E = C_B(C)$
4. a) $f_1 = R_{E,-90°}$, con $E = C_A(O)$
   b) $f_2 = T_{3\overrightarrow{BA}}$
   c) $f_3 = R_{E,-90°}$
5. a) S_{AD} b) S_{AB} c) I
   d) S_e, con $A \in e$, $e \parallel BD$ e) $T_{\overrightarrow{AD}}$ f) C_A
   g) C_A h) $At_{e,\overrightarrow{AB}}$, con $e \parallel AB$, $O \in e$
6. $At_{BF,\overrightarrow{BF}}$
7. C_B
8. a) $f = S_{AB}$ b) $\overline{CC'} = \sqrt{3}.x$
9. a) $f = At_{e,3/2\overrightarrow{MA}}$ b) Área $= \dfrac{7\sqrt{3}}{4}.a^2$
   c) $f_1 = C_{O'}$, con $O' = S_p(O)$, O punto medio de $\overline{MN}$. d) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}a$

10. a) $T_{\overrightarrow{AM}}$ b) S_e, $e \perp AM$, $C \in e$
    c) $R_{P,+120°}$, P centro del ACM
    d) $AT_{e,\overrightarrow{A_1C}}$, $e \perp AB$ por el punto medio de AC, $A_1 = S_e(A)$
    e) $R_{C,-120°}$ f) $AT_{IJ,\overrightarrow{CK}}$ siendo I,J,K puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CM}$ y $\overline{MN}$
11. a) $AT_{e,\overrightarrow{AB}}$ siendo (e) paralela media de AB y CD. b) S_e
    c) C_O, O centro del ABED
12. a) $R_{B,+120°}$ b) $AT_{e,3/2\overrightarrow{AF}}$
13. $R_{O,-90°}$, O centro del cuadrado.

Capítulo 9 LUGARES GEOMETRICOS FUNDAMENTALES

1. a) $\widehat{ACB} = \widehat{BCP} = 90°$, $\overline{AC} = \overline{CP}$, $\overline{BC}$ común (L.A.L)
   b) $P \in \mathscr{C}_{B,\overline{AB}}$
2. a) $M \in \mathscr{C}_{O,k/2}$
   b) $P \in \mathscr{C}_{O,k}$
3. $O \in mz(\overline{AB})$. El lugar geométrico es la semirrecta $\overline{Mx}$, incluida en la mediatriz, M punto medio de $\overline{AB}$
4. $O \in mz(\overline{AB})$
5. $O \in mz(\overline{O_1O_2})$
6. $P \in bz(\widehat{xOy})$
7. $M \in mz(\overline{OP})$
8. a) $\widehat{CAM} = \widehat{MBD}$, $\widehat{CMA} = \widehat{BMA}$, $\overline{AM} = \overline{BM}$. (A.L.A.)
   b) M pertenece a la paralela media de (r) y (s).
9. Como el centro del paralelogramo es punto medio de las diagonales, el problema se reduce al ejercicio 8.
10. $I \in bz(\widehat{BAC})$
11. $\overline{OM} = \sqrt{r^2 - (k/2)^2}$, constante $\Rightarrow M \in \mathscr{C}_{O,\overline{OM}}$
12. $O \in bz(\widehat{aOb})$

13. A varía en una paralela (p) a BC, a una distancia h_A
14. Sea $a\widehat{O}x = 30°$. El lugar geométrico es $\overrightarrow{Ox}$
15. a) $A\widehat{T}O = O\widehat{B}A$ $\qquad \overline{OT} = \overline{OB}$, $\overline{OA}$ común (L.L.A)
    b) $T \in \mathscr{C}_{A,\overline{AB}}$
16. $\overline{OB} = \sqrt{r^2 + k^2}$, constante, O fijo, $\Rightarrow O \in \mathscr{C}_{O,\overline{OB}}$
17. $C\widehat{N}P = 60°$ y $N\widehat{C}P = 60°$
    P varía en la semirrecta abierta $\overrightarrow{Cr}$, tal que $\widehat{ACr} = 30°$
18. $P \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},90°}$
19. a) $B \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AP},60°}$
    b) $C \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AP},120°}$
20. $D \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},30°}$
21. $M \in \mathscr{C}_{\overline{OP}}$
22. Sea O el centro del arco, $\Rightarrow M \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{OB},30°}$
23. a) $B\widehat{I}C = 120°$
    b) $I \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},120°}$
    c) $B\widehat{E}C = 30°$
    d) $E \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},30°}$
    e) $B\widehat{I}C = 90° + \alpha/2 \Rightarrow I \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},90°+\alpha/2}$
    $B\widehat{E}C = \alpha/2 \Rightarrow E \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},\alpha/2}$
24. a) $B\widehat{H}C = 150°$
    b) $H \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},150°}$
    c) $B\widehat{H}C = 180° - \alpha \Rightarrow H \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},180°-\alpha}$
25. a) $A\widehat{N}B = \alpha$ constante por ser inscrito en $\mathscr{C}_1$ de cuerda $\overline{AB}$
    $A\widehat{M}B = \gamma$ constante por ser inscrito en $\mathscr{C}_2$ de cuerda $\overline{AB}$
    b) Las bisectrices pasan por P y Q, puntos medios de los arcos AB. $N\widehat{M}B = \beta$ (cte.)
    $I \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{PQ},90°+\beta/2}$
    c) Las mediatrices pasan por O' y O'' centros de $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$
    $C \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{O'O''},180°-\beta}$
26. a) $P \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AB},15°}$
    b) Las mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{BP}$ pasan por O y O' centros de los arcos, y el ángulo que forman es 45°. Entonces el circuncentro varía en el arco $\mathscr{A}_{\overleftrightarrow{OO'},45°}$
27. a) $CAB = C\widehat{P}B = 60°$, inscritos de cuerda $\overline{BC}$, y $C\widehat{E}P = C\widehat{B}A = 30°$
    b) $E \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},30°}$
    c) $S \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{BC},120°}$
28. a) $E \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AB},15°}$
    b) La mediatriz de $\overline{BP}$ pasa por el centro del arco $\mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AB},45°}$
    La mediatriz de $\overline{EB}$ pasa por el centro del arco $\mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AB},15°}$
    $C \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{OO'},30°}$
29. Sea $A\widehat{M}B = \alpha$ constante,
    $P \in \mathscr{A}_{\overleftrightarrow{AB},2\alpha}$

Capítulo 10 TEOREMA DE THALES Y APLICACIONES

1. Utilizar procedimiento indicado en 6.1 de este capítulo.
2. a) Se ubica M igual que en el ejercicio 1.
   b) $AN = 4$, $\overline{MN} = 8/3$
3. Análogo al ejercicio 1, con la medida $\overline{AB}$ igual a la suma.
4. Utilizar procedimiento indicado en el numeral 7 de este capítulo, con $\overline{BY} = n$ y $\overline{AY} = m$.
5. Se calcula $\overline{AB}$ con el teorema de la bisectriz $\Rightarrow \overline{AB} = 6$
6. $\overline{BI} = 35/8$, $\overline{EC} = 21/2$, $\overline{EI} = 105/8$
7. P,O,N,M alineados. Aplicando Thales y considerando que $\overline{NB} = \overline{AN}$, se deduce que $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MN}} \Rightarrow$ (PMNO) grupo armónico .
8. a) Se construye análogamente al ejercicio 4.
   b) $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{GA}}{\overline{GO}} = 2$, $\overline{GA} + \overline{GO} = \overline{AO}$, $\overline{GO} = \overline{AO}/3$, O es punto medio de $\overleftrightarrow{DC}$, entonces G es baricentro del $\widehat{ACD}$.
9. Se construye $\widehat{AB'C'}$ auxiliar , con $\overline{AB'} = m$, $\overline{AC'} = n$, y ángulo $\widehat{A}$. Sea M' punto medio de B'C'. Sobre AM' se ubica M. Por M la paralela a B' y C' determina B y C.
10. Aplicando el teorema de la bisectriz y que $\overline{MB} = \overline{MC}$ se deduce que $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$. Por recíproco de Thales se cumple que $DE \parallel BC$.
11. Construir la circunferencia de Apolonio para AB y k. La intersección de ambas circunferencias determina el punto P.
12. a) Se construye según procedimiento indicado en el numeral 7.
    b) Circunferencia de Apolonio de diámetro $\overleftrightarrow{XY}$.
    c) Como $\overline{Px}$ y $\overline{Py}$ son bisectrices interior y exterior del $\widehat{APB} \Rightarrow \widehat{XPY} = 90^{o}$ y $\widehat{APX} = \widehat{XPB}$
13. a) Se ubica AB . C queda determinado por la intersección de la circunferencia de Apolonio, con la paralela a AB a una distancia h_C .
    b) Se ubica $\overleftrightarrow{AM}$. C queda determinado por la intersección de la circunferencia de Apolonio, con el arco capaz de segmento $\overleftrightarrow{AM}$ y ángulo C, siendo $B = C_M(C)$.
14. $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \dfrac{2}{3}$. $M \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{XY}}$ de Apolonio. La intersección del arco con la circunferencia determina el punto M.

Capítulo 11 HOMOTECIA

1. Proceder en forma análoga al ejemplo 2.6 de este capítulo.
2. El centro es $\{O\} = AC \cap BD$ y la razón $k = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.
3. Probar que $C' = H_{O,k}(C)$, entonces se cumplirá que C, O y C' resultan alineados.

4. Existe $H_{O,k}$, $k = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$, tal que $H_{O,k}(A'B'C'D') = ABCD$.
   $OD \cap AB = \{D'\}$ y $OC \cap AB = \{C'\}$
5. El lugar geométrico es la recta $r' = H_{A,1/2}(r)$.
6. a) El lugar geométrico es la circunferencia $\mathscr{C}_1 = H_{A,1/2}(\mathscr{C})$.
   b) El lugar geométrico es la circunferencia $\mathscr{C}_2 = H_{P,1/3}(\mathscr{C})$. siendo P el punto medio de $\overline{AB}$.
7. a) El lugar geométrico está incluido en la circunferencia $\mathscr{C}_1 = H_{B,1/2}(\mathscr{C})$.
   b) El lugar geométrico está incluido en la circunferencia $\mathscr{C}_2 = H_{A,4/3}(\mathscr{C}_1)$
   c) . El lugar geométrico está incluido en la circunferencia $\mathscr{C}_3 = H_{A,2}(\mathscr{C}_1)$
8. a) $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90° \Rightarrow AOBP$ inscriptible de diámetro $\overline{OP}$.
   b). El lugar geométrico es la recta $t_o = H_{O,1/2}(t)$.
9. a) $k_1 = -2$ b) $k_2 = -2$ c) $P = O$ $k = 4$
10. a) Si $O'\widehat{A}P = \alpha$, entonces $P\widehat{O'}A = 180° - 2\alpha$ y $A\widehat{O''}Q = 2\alpha \Rightarrow O'P \parallel O''Q$
    b) El centro es $I = O'O'' \cap t$, siendo t la tangente común exterior. La razón es k=5/2
    c) $M \in \mathscr{C}_O$, tal que $\mathscr{C}_O = H_{I,7/4}(\mathscr{C})$
11. a) $\overline{AH} = 3/4\ \overline{AP}$
    b) $H \in \mathscr{C}_1$, tal que $\mathscr{C}_1 = H_{A,3/4}(\mathscr{C})$
12. a) $\overline{O'a'} = H_{B,1/2}(\overline{Oa})$ b) $\overline{O''a''} = H_{O,4/3}(\overline{O'a'})$ c) $f = H_{O,1/2}$ d) $\overline{O'''a'''} = H_{O,1/2}(\overline{O''a''})$
13. a) $\mathscr{C}_1 = H_{B,1/2}(\mathscr{C})$
    b) k = 1/2 , 1/2.2/3 = 1/3 , P, G y C alineados , pues G es baricentro.

Capítulo 12 SEMEJANZA

1. Sean $\widehat{EAD} = \alpha$, $\widehat{EDA} = \beta$, $\widehat{DEA} = 90°$
   b) $\widehat{CDA} = 90°$, $\widehat{DAC} = 90° - \alpha = \beta$
   c) $\widehat{BED} = 90°$, $\widehat{EDB} = 90 - \beta = \alpha$
   d) $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{ABD} = \beta$
2. a) $\widehat{MDC} = \widehat{BDA}$, $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$
   b) $\widehat{DMC} \approx \widehat{CMA} \Rightarrow \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$.
3. $M = N$ y $M_1 = N_1$, inscritos de cuerda $\overline{AB}$.
4. a) $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90°$
   b) $\widehat{MNA} = \widehat{MPA}$, $\widehat{MNA} = \widehat{ACN}$, (complementarios del $\widehat{CAN}$) $\Rightarrow \widehat{BPA} = \widehat{ACP}$, y $\widehat{PAC} = \widehat{PAB}$
   c) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$, por parte b), $\Rightarrow \overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$
5. a) $\widehat{MNC} = \widehat{MBH}$ (complementarios del $\widehat{NBC}$) , y $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$
   b) $\widehat{ACB} = \widehat{MBH}$ (complementarios del $\widehat{HBC}$)
   $\widehat{ABC} = \widehat{BMH}$ (complementarios del $\widehat{MBA}$).
6. $\widehat{PDA} \approx \widehat{PEB}$, entonces $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PE}}{\overline{PB}}$
7. a) El lugar geométrico es la recta $r' = RH_{A,-30°,\sqrt{3}/2}(r)$
   b) El lugar geométrico es la recta $r'' = H_{A,2/3}(r')$ c)

8. B $\xrightarrow{Se}$ G $\xrightarrow{H_{A,3/2}}$ M, el lugar geométrico es la circunferencia $\mathscr{C}' = H_{A,3/2} \circ Se(\mathscr{C})$

9. a) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = cte. \Rightarrow \dfrac{\overline{PA}}{\overline{AD}} = cte.$ y $P\widehat{A}D = 90°$

   b) Como d (a,b) = 3 $\Rightarrow$ $P\widehat{A}D$ es isósceles y rectángulo.

   c) Aplicar Pitágoras

   b) El lugar geométrico es la recta a' $= RH_{P,-45°,\sqrt{2}}(a)$

10. a) Por Pitágoras $\overline{HC} = \sqrt{3}$

   b) $\overline{HA} = 3x$

11. a) $B\widehat{O}A = B\widehat{C}A = 90°$

   b) $B\widehat{O}C = BAC$, $B\widehat{O}C$ fijo $\Rightarrow B\widehat{A}C = $ cte. y $B\widehat{C}A = 90°$

   c) H = $RH_{C,+30°,\sqrt{3}/2}(B)$

12. $\overline{AH} = \sqrt{x.y}$, $\overline{AB} = \sqrt{(x+y).x}$, $\overline{AC} = \sqrt{(x+y).y}$, $\overline{BC} = x+y$. Área = $(x+y)\sqrt{x.y}/2$

13. Por ejemplo $\sqrt{15} = \sqrt{5.3}$ Construir : i) $\overleftrightarrow{ST}$, con $\overline{SH} = 5$ y $\overline{HT} = 3$ ii) $\mathscr{C}_{ST}$

   iii) por H la perpendicular (p) a ST iv) $R = p \cap \mathscr{C}$

14. a) $RH_{Q,+90°,2}$

   b) $Q_1 = Q$, O_1 punto medio de $\overleftrightarrow{QA}$, y D_1 punto medio de $\overleftrightarrow{QO}$

15. a) $O \in \overline{AA'}$, tal que $AO = 1/3.\ AA'$, el eje e $\perp$ AA' por O

   b) M' = A

   c) $O\widehat{M'}B$ equilátero

16. a) $k = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 2$, $\varphi = -90°$. El centro se determina según procedimiento explicado en 6.2

   b) M punto medio de $\overleftrightarrow{AC} \Rightarrow A\widehat{B}M$ y $C\widehat{D}N$ equiláteros.

17. Construir : i) $\{P\} = MN \cap t$, ii) Por P la tangente (t) a $\mathscr{C}_2$, con T punto de tangencia iii) la circunferencia $\mathscr{C}$, tangente a (t) en T, y a (t_1) en T_1.

18. a) Por P se traza una tangente (t) a $\mathscr{C}$, siendo T el punto de tangencia.

   b) $\overline{PA}.\overline{PB} = 5 \Rightarrow \overline{PT} = \sqrt{5}$ y $\overline{PB} - \overline{PA} = \overline{AB} = 11/6$.

19. Construir : i) la recta (t_1) tangente a $\mathscr{C}_1$ en T_1 ii) $\{P\} = c \cap t_1$ iii) Por P la recta (t_2) tangente a $\mathscr{C}_2$ en T_2 iv) la circunferencia $\mathscr{C}$ tangente a (t_2) en T_2, y a (t_1) en T_1.

20. a) $\overline{AX} = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).\overline{AB}$

   b) Probar que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$, $\overline{BX} = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right).\overline{AB}$

   c) Construir la figura anterior con $\overline{AB} = 7$

21. a) Aplicar definición de potencia

   b) Probar que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{AX}}{\overline{XM}}$, usando parte a) y que $\overline{MN} = \overline{AB}$ y $\overline{AB} = \overline{AX}$

   c) Se construye la figura para $\overline{AB} = 3$

22. a) $\overline{BM} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ b) $\overline{HM} = 5/8$ c) $\overline{O_1H} = 11/8$ d) $\overline{AB} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

Capítulo 13 INCIDENCIAS Y ORDEN EN EL ESPACIO

1. a) Secantes,O,β b) Secantes ,G,β c) alabeadas d) alabeadas e) Secantes , A ,β f) Paralelas , α g) Secantes , N ,β h) alabeadas i) Secantes, O, α j) Paralelas, β
2. EMNF rombo de lado la altura de cara y diagonal menor 3 cm.
3. MN
4. Sea $\{I\} = BC \cap MN$, $(B,C,D) \cap (M,N,P) = \overline{PI}$, la solución es $\{K\} = PI \cap BD$
5. Sean M,N, y P, puntos medios de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC} \Rightarrow$ $MC \cap NA \cap BP = \{G\}$
   $(O,M,C) \cap (O,N,A) \cap (O,B,P) = OG$
6. a) KL b) KM c) $AC \cap (K,L,M) = AC \cap KL = \{P\}$ d) $KM \cap BD = \{Q\}$
   e) MI , siendo $\{I\} = KL \cap AC$
7. $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$, $r \cap s = \{ I \} \Rightarrow I \in \alpha$ $\quad I \in r \Rightarrow I \in \beta$ $\quad I \in s \Rightarrow I \in \gamma$
8. Sea $\gamma = (O,A,B)$, $C \in \gamma$, $\alpha \cap \gamma = i$, $P,Q,C \in i$
9. a) NC b) $\{I\} = DG \cap NC$
10. Se construye : i) El plano $\alpha = (P,a)$, ii) $\{I\} = b \cap \alpha$ iii) $PI = r$
11. Sea $P \in a$. Construir : i) $\alpha = (P,b)$, ii) $c \cap \alpha = \{I\}$ iii) $PI = r$
12. Se aplica ejercicio anterior y se obtiene la recta (i) secante con (a) , (b) y (c).
    $\alpha = (a,i)$ $\beta = (b,i)$ $\gamma = (c,i)$
13. b) triángulo isósceles VMN , con $\overline{VM} = \overline{VN} = 6$ y $\overline{MN} = 4$
15 a) En primer lugar construir el rectángulo ACGE cuyos lados son la arista y la diagonal de cara. Posteriormente ubicar M y N.

Capítulo 14 PARALELISMO EN EL ESPACIO

1. Por P se trazan $a' \parallel a$ y $b' \parallel b \Rightarrow \alpha = (a',b')$
2. $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (V,A,B)$
3. Construir : i) Por P el plano $\beta \parallel \alpha$ ii) $\{Q\} = \beta \cap s$ iii) $r = PQ$
4. Construir : i) Por $A \in a$ cualquiera, la recta $c' \parallel c$ ii) $\alpha = (c',a)$ iii) ,$\{B\} = \alpha \cap b$
   iv) Por B se traza (r), $r \parallel c$.
5. Probar que $MN \parallel AB$ y $\Rightarrow MP \parallel AC$
6. a) Deducir que $MQ \parallel NP$, entonces M,N,P y Q son coplanarios
   b) MNPQ paralelogramo. Sean I y J puntos medios de $\overleftrightarrow{BV}$ y $\overleftrightarrow{AC} \Rightarrow$
   MIPJ paralelogramo, y la diagonal $\overleftrightarrow{MP}$ corta a $\overleftrightarrow{QN}$ y $\overleftrightarrow{JI}$ en su punto medio.
7. $O \in i$, $i \parallel a \parallel b$
8. a) Se halla la tangente $t' \parallel r \Rightarrow (t',P) = \beta$
   b) Por P se traza $s' \parallel s$, $\alpha \cap s' = \{A\}$. Por A se considera t_A , tangente a $\mathscr{C}$.
   $\gamma = (t_A,P)$
9. a) $AB \cap EP = \{N\}$, $\overleftrightarrow{GP} \cap BC = \{M\} \Rightarrow MN = i$
   b) Considerando que $\overleftrightarrow{PB}$ es paralela media en $\widehat{EAN}$ y en $\widehat{GCM}$, deducir que
   $\dfrac{\overline{GP}}{\overline{MP}} = \dfrac{\overline{EP}}{\overline{NP}} \Rightarrow EG \parallel MN$
10. $MN \parallel AB$ y $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel \alpha$

Capítulo 15 PERPENDICULARIDAD

1. Sea M punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$. $AB \perp MC$, $AB \perp MD \Rightarrow AB \perp (M,D,C)$
2. Por P se trazan $\alpha \perp a$ y $\beta \perp b$. $\alpha \cap \beta = r$
3. Por A se traza $p \perp \beta$, $p \cap \beta = \{I\}$. $\mathscr{C}_{\overleftrightarrow{BI}} \cap i = P$
4. Aplicar teorema de las tres perpendiculares
5. Probar que $OB \perp t$, $OB \perp OA \Rightarrow OB \perp \alpha$
6. Se trazan β y γ, planos mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. $\beta \cap \gamma = i$, $\alpha \cap i = \{I\}$
7. Sean $p \perp \alpha$, por A, $p \cap \alpha = \{I\}$, $r = \sqrt{k^2 - \overline{IA}^2}$
   El lugar geométrico es la circunferencia de centro I y radio r
8. Sea el plano $\beta \perp r$ por A. $\beta \cap r = \{B\} \Rightarrow H \in \mathscr{C}_{\overline{AB}}$
9. a) En el triángulo $\widehat{ADS}$, aplicando Pitágoras se tiene que $\overline{AS} = (\sqrt{5}/2).a$ y también $\overline{GS} = .(\sqrt{5}/2).a$ Análogo para los restantes puntos.
   b) Hexágono regular de lado $(\sqrt{2}/2).a$, y circuncentro O .
10. a) $CB \perp AC$, $SA \perp \pi \Rightarrow SC \perp BC$
    b) $BC \perp SC$, $BC \perp AC$, $BC \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
    c) $AH \perp SC$, $AH \perp \beta$, $SB \subset \beta \Rightarrow AH \perp SB$
    d) $AH \perp SB$, SB fija , A fijo $\Rightarrow AH \subset \delta$, tal que $A \in \delta$, y $\delta \perp SB$
    e) Sea $\{P\} = SB \cap \delta$, $H \in \mathscr{C}_{\overleftrightarrow{AP}}$ incluida en δ.
11. $AB \perp MD$, $AB \perp MC \Rightarrow AB \perp MN$ y $MN \perp CD$.

Capítulo 16 PROYECCIONES , DISTANCIAS Y ANGULOS

1. a) $\overline{OA} = (\sqrt{3}/2).x$, $A = 3\pi.x^2$, $V = (\sqrt{3}/2)\pi.x^3$
   b) $x/2$, $A = \pi.x^2$, $V = \pi/6.x^3$ c) $(\sqrt{2}/2).x$
2. a) $\widehat{AMD} = 70^\circ\ 31'\ 44''$ b) $\widehat{ABN} = 54^\circ\ 44'\ 8''$ c) $25^\circ\ 14'\ 22''$
3. a) $A = 2\sqrt{3}.x^2$, $V = (\sqrt{2}/3).x^3$
   b) $r = (\sqrt{2}/2).x$, $A = 2\pi.x^2$, $V = (\sqrt{2}/3)\pi.x^3$
   c) $r = (\sqrt{6}/6).x$ $A = 2/3\ \pi.x^2$ $V = (\sqrt{6}/27)\pi.x^3$ d) $109^\circ\ 28'\ 16''$
4. Se traza el plano $\alpha \perp a$, tal que $\alpha \cap a = \{A\}$, $\alpha \cap b = \{B\}$ y $\alpha \cap c = \{C\}$
   Se construyen los triángulos: i) $\widehat{VAB}$, con $\widehat{AVB} = 60^\circ$, $\widehat{VAB} = 90^\circ$ y $\overline{VA} = x$
   ii) $\widehat{VAC}$ con $\widehat{AVC} = 45^\circ$, $\widehat{VAC} = 90^\circ$ y $\overline{VA} = x$
   iii) $\widehat{VBC}$ con $\widehat{BVC} = 30^\circ$, y $\overline{VB}$ y $\overline{VC}$ hallados
   iv) $\widehat{ABC}$ con $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ hallados anteriormente .La solución es $\widehat{BAC}$
5. a) $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = (\sqrt{2}/2).x$ $\overline{OA} = (\sqrt{6}/6).x$
   b) Aplicar recíproco de Pitágoras
6. a) $\widehat{\alpha,\beta} = 63^\circ\ 23'\ 6''$ $\widehat{\alpha,\gamma} = 75^\circ\ 57'\ 50''$
   b) $d(I,\beta) = (2\sqrt{5}/5).x$ $d(I,\gamma) = (2\sqrt{17}/17).x$
   c) $O \in \overleftrightarrow{SI}$, $\overline{SO} = (21/16).x$ $r = \overline{SO}$ $V = (3087/1024)\ x^3$
7. $(\sqrt{2}/12).x^3 = 2\,(\sqrt{2}/24).x^3$
8. a) $V = (\pi/12).x^3$ b) $h = (1/6).x$ c) $V = ((15+5\sqrt{2})/72)\ \pi.x^3$

9. a) $((\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2})/4)).x$

b) AN , $N\in \overleftrightarrow{MP}$, $AN \perp MP$, $\overline{AN} = (3\sqrt{5}/10).x$ c) $\widehat{ANQ} = 20° 26' 22''$

10. a) Aplicar recíproco de Pitágoras b) $PQ \perp QL$, $PQ \perp QM \Rightarrow PQ \perp QR$

c) $A = ((5\sqrt{3}+\sqrt{39}+3)/2).x^2$ $V = (3\sqrt{3}/4).x^3$

d) centro O punto medio de $\overleftrightarrow{PM}$, $r = (5/4).x$ e) $\widehat{MQR} = 60°$

Capítulo 17 ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

1. Seis planos diagonales determinados por aristas opuestas.
Tres planos paralelos a caras opuestas, por el centro del cubo.
Seis ejes determinados por los puntos medios de aristas opuestas.
Tres ejes determinados por centros de caras opuestas.
2. Tres planos diagonales determinados por aristas opuestas.
Seis planos perpendiculares a aristas opuestas por el centro.
Tres ejes , diagonales del octaedro.
Seis ejes determinados por puntos medios de aristas opuestas
3. a) $T_{\overrightarrow{AG}}$ $\overline{AG} = \sqrt{3}.a$ b) $C' \equiv D$
4. a) $e = HD$ $\varphi = 90°$ b) $\widehat{HGC}$
5. Sean (x) e (y) las rectas que contienen las bisectrices interior y exterior al $\widehat{r,s}$
y $z \perp (r,s)$ por O.
S_x , S_y , S_z $S_{(x,y)}$, $S_{(y,z)}$, $S_{(z,x)}$ $R_{x,180°}$, $R_{y,180°}$, $R_{z,90°}$
6. Sugerencias : a) si $P_1 = S_\alpha(P)$, $P_2 = S_\beta(P_1)$, $\omega = (P,P_1,P_2)$, $P' = S_x(P)$
Probar que $P'\in \omega$, y que $P' = P_2$
b) $P_3 = C_O(P_1)$ $\varepsilon = (P,P_1,P_3)$ $P_0 = S_z(P)$
Probar que $P'\in \varepsilon$, y que $P_0 = P_3$
7. Sea O punto medio de $\overleftrightarrow{AC}$. El lugar geométrico es el plano $\alpha' = C_O(\alpha)$
8. Sea O punto medio de $\overleftrightarrow{AC}$. y $\beta \perp AC$ por O, $\beta \cap \alpha = b$.
El lugar geométrico es la recta $d = S_{AC}(b)$
9. $Q = R_{BF,45°}(P)$. El lugar geométrico es el cuadrado BFA_1E_1, incluido en el plano que contiene a D,B,F,H.
10. Sean $R\in r$ y $S\in s$, tal que RS es normal común, M punto medio de $\overleftrightarrow{RS}$,
$r' \parallel r$, $s' \parallel s$ por M , (a) y (b) bisectrices interior y exterior al r',s'.
Los ejes son (a), (b) y RS.
11. $B' = S_\alpha(B)$ $\{P\} = AB' \cap \alpha$
12. $B' = S_\alpha(B)$ $\{P\} = AB' \cap \alpha$
13. Se traza $\beta \perp e$, por P, $e \cap \beta = \{A\}$, $\beta \cap \alpha = i$. Se construye $\widehat{PAP'}$ isósceles, $P'\in i$
$\widehat{PAP'} = \varphi$. Por $B\in e$, se traza $\gamma \perp e$. En γ se construye $\widehat{QBQ'}$, isósceles, con
$\widehat{QBQ'} = \varphi$, Q y Q' pertenecientes a la intersección de α con γ. $PQ = r$, $P'Q' = r'$
14. Demostrar que $S_a \circ S_{a'} = T_{\vec{u}}$ y que $S_b \circ S_{b'} = T_{\vec{u}}$
15. Sean P y $\alpha \perp e$ por P , $\alpha \cap e = \{O'\}$. Por O' se trazan paralelas (a') y (b') a
(a) y (b) . Como $S_a \circ S_{a'} = S_b \circ S_{b'} \Rightarrow S_b \circ S_a = S_{b'} \circ S_{a'} = R_{e,2\widehat{a'b'}}$
16. Sean $\overleftrightarrow{P_1} = C_O(P)$. $P_2 = T_{\vec{u}}(P_1)$ y $P' = C_{O'}(P)$.
Como OO' es paralela media en PP_1P_2 , entonces $P' = P_2$

INDICE GENERAL

PROLOGO.. 4
INDICE TEMATICO.. 5
HERRAMIENTAS DEL SISTEMA.. 6
NOTACION 8

GEOMETRIA DEL PLANO

Capítulo 0 . REVISION

1. Construcciones elementales con regla y compás.................................... 10
   1.1 Sugerencias.................................... 10
   1.2 Ejemplo.................................... 12
   1.3 Ejercicios.................................... 13
2 Ángulos.................................... 14
   2.1 Definiciones y propiedades.................................... 14
   2.2 Ángulos relacionados con circunferencias.................................... 16
   2.3 Ejemplo.................................... 17
   2.4 Ejemplo.................................... 18
   2.5 Ejercicios.................................... 19
3 Intersecciones de lugares geométricos.................................... 20
   3.1 Definiciones.................................... 20
   3.2 Ejemplo.................................... 21
   3.3 Ejemplo.................................... 21
   3.4 Ejercicios.................................... 22
4 Circunferencias.................................... 23
   4.1 Posiciones relativas entre recta y circunferencia 23
   4.2 Posiciones relativas entre dos circunferencias.................................... 23
   4.3 Propiedades.................................... 24
   4.4 Ejemplo.................................... 24
   4.5 Ejercicios.................................... 26
5 Triángulos.................................... 27
   5.1 Clasificación.................................... 27
   5.2 Elementos notables.................................... 27
   5.3 Ejemplo.................................... 28
   5.4 Ejemplo.................................... 29
   5.5 Ejemplo.................................... 29
   5.6 Ejercicios.................................... 30
6 Cuadriláteros.................................... 31
   6.1 Definiciones y propiedades.................................... 31
   6.2 Ejemplo.................................... 33
   6.3 Ejemplo.................................... 33
   6.4 Ejemplo.................................... 34
   6.5 Ejercicios.................................... 35

7 Trigonometría, perímetros y áreas.......36
7.1 Relaciones métricas en triángulos rectángulos.......36
7.2 Relaciones métricas en triángulos cualesquiera.......36
7.3 Perímetros y áreas.......36
7.4 Ejemplo.......37
7.5 Ejemplo.......38
7.6 Ejercicios.......39

Capítulo 1 . INCIDENCIAS, ORDEN Y MEDIDAS EN EL PLANO
1. Conceptos primitivos.......40
2. Axiomas de existencia y enlace.......40
3. Posiciones relativas de rectas coplanarias.......41
4. Rectas paralelas.......41
5. Axioma de orden en las rectas.......41
6. Semirrectas.......42
7. Segmentos.......42
7.1 Ejercicios teóricos.......42
8. Axioma de partición del plano.......43
9. Teorema de Pasch.......43
10. Ángulo convexo.......43
11. Figura convexa.......44
11.1 Figura, definición.......44
11.2 Figura convexa, definición.......44
11.3 Propiedad.......44
11.4 Ejercicios teóricos.......45
12 Triángulos.......45
13 Polígono convexo.......45
14 Axioma métrico.......46
15 Isomorfismo entre la recta y el conjunto de los números reales.......46
16 Punto medio.......47
16.1 Definición.......47
16.2 Existencia y unicidad.......47
17 Circunferencia.......47
17.1 Definición.......47
17.2 Propiedad.......47

Capítulo 2 . ISOMETRIAS EN EL PLANO
1. Funciones.......48
2. Estructura algebraica de grupo.......49
3. Isometrías.......50
3.1 Definición.......50
3.2 Imagen de un segmento.......50
4. El grupo de las isometrías.......51
4.1 Ejemplo.......52
5. Axioma de determinación de isometrías.......53

6. Isometría identidad........ 53
7. Isometrías directas e indirectas........ 54
8. Figuras dobles y unidas........ 54
8.1 Punto unido, definición........ 54
8.2 Figura unida, definición........ 54
8.3 Figura doble........ 54
8.4 Propiedad de las rectas unidas........ 55
9 Congruencia........ 55
9.1 Figuras congruentes........ 55
9.2 Congruencia y medidas........ 55
9.3 Notación........ 56
9.4 Ejercicios teóricos........ 56
10 Ejercicios teóricos........ 56
11 Suma y orden en segmentos y ángulos........ 56
11.1 Suma........ 56
11.2 Orden........ 57
12 Teoremas de transporte e inversión........ 57
12.1 Teorema de transporte del segmento........ 57
12.2 Teorema de inversión del segmento........ 57
12.3 Teorema de transporte del ángulo convexo........ 58
12.4 Teorema de inversión del ángulo convexo........ 58
13 Triángulos isósceles e isoángulos........ 58
13.1 Ejercicio teórico........ 58
14 Primer criterio de congruencia de triángulos (L.A.L.)........ 59
14.1 Ejemplo........ 59
15 Segundo criterio de congruencia de triángulos (A.L.A.)........ 60
15.1 Ejemplo........ 61
16 Tercer criterio de congruencia de triángulos (L.L.L.)........ 61
17 Teorema del ángulo externo........ 62
18 Cuarto criterio de congruencia de triángulos (L.L.A)........ 63
18.1 Ejemplo........ 64
19 Ejercicios........ 64

Capítulo 3 . SIMETRIA AXIAL

1. Definición........ 66
2. Isometría involutiva........ 66
2.1 Definición........ 66
2.2 Propiedad........ 66
3. Imágenes de rectas........ 67
4. Perpendicularidad........ 67
4.1 Ángulo recto........ 67
4.2 Rectas perpendiculares........ 67
4.3 Rectas perpendiculares al eje........ 67
4.4 Ejercicio teórico........ 68
4.5 Existencia y unicidad de la perpendicular........ 68

5. Ejemplo..........
6. Mediatriz.......... 69
   6.1 Definición.......... 69
   6.2 Existencia y unicidad.......... 69
7. Definición alternativa de simetría axial.......... 69
8. Bisectriz.......... 70
   8.1 Definición.......... 70
   8.2 Existencia y unicidad.......... 70
9 Ejemplo.......... 70
10 Ejercicios.......... 70
.... 71

Capítulo 4 . SIMETRIA CENTRAL

1. Definición..........
2. Ejercicio teórico.......... 72
3. Imágenes de rectas.......... 72
   3.1 Rectas que contienen al centro de simetría.......... 72
   3.2 Rectas que no contienen al centro de simetría.......... 72
4. El centro de simetría como punto medio.......... 73
5. Definición alternativa de simetría central.......... 73
6. Ejemplo.......... 74
7. Ejemplo.......... 74
8. Paralelogramos.......... 74
   8.1 Definición.......... 75
   8.2 Centro de simetría de una figura.......... 75
   8.3 Ejercicios teóricos.......... 75
9. Paralela media de un triángulo.......... 75
10. Ejemplo.......... 76
11. Propiedad del baricentro de un triángulo.......... 76
12. Ejercicios.......... 77
.... 77

Capítulo 5 . PARALELISMO Y TRASLACION

1. Paralelismo entre rectas..........
   1.1 Axioma de paralelismo.......... 78
   1.2 Relación de equivalencia.......... 78
2. Ejercicios teóricos.......... 78
3. Relaciones entre rectas paralelas y ángulos.......... 79
   3.1 Ángulos particulares.......... 79
   3.2 Ángulos correspondientes.......... 79
   3.3 Ángulos alternos internos.......... 79
   3.4 Ejercicios teóricos.......... 80
4 Ejemplo.......... 80
5 Segundo teorema del ángulo externo.......... 80
   5.1 Ejercicio teórico.......... 81
6 Vectores.......... 81
7 Traslación , definición.......... 81
.... 82

8 Propiedades de la traslación 82
- 8.1 Recta guía 82
- 8.2 Imagen de un punto de la recta guía 83
- 8.3 Ejercicios teóricos 83
- 8.4 Imágenes de puntos cualesquiera 83
- 8.5 Definición alternativa de traslación 84

9 Ejemplo 84
10 Grupo de las traslaciones del plano 85
11 Ejemplo 85
12 Ejercicios 86

Capítulo 6 . ROTACION

1. Ángulos convexos orientados 87
2. Rotación, definición 88
3. Imagen de una semirrecta con origen en el centro de giro 88
4. Propiedades del centro de rotación 89
5. Construcción del centro 90
6. Ejemplo 90
7. Ejercicios teóricos 91
8. Definición alternativa de rotación 91
9. Ejemplo 91
10. Grupo de las rotaciones concéntricas 92
11. Ejemplo 92
12. Ejercicios 93

Capítulo 7 . ANTITRASLACION

1. Definición 94
2. La antitraslación como composición de isometrías 94
3. Propiedades 95
4. Ejemplo 96
5. Ejemplo 96
6. Ejercicios 97

Capítulo 8 . COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE ISOMETRIAS

1. Rotación 98
   - 1.1 Composición 98
   - 1.2 Descomposición 99
   - 1.3 Aplicación 99
2. Traslación 99
   - 2.1 Composición 99
   - 2.2 Descomposición 100
   - 2.3 Ejercicio teórico 100
3. Simetría central 100
   - 3.1 Composición 100
   - 3.2 Descomposición 100

3.3 Ejemplo
3.4 Ejercicio teórico ... 101
3.5 Aplicación ... 101
3.6 Ejercicio teórico ... 101
4 Antitraslación ... 102
4.1 Composición ... 102
4.2 Descomposición ... 102
4.3 Aplicación ... 102
4.4 Ejercicio teórico ... 102
5 Composiciones notables determinadas ... 103
6. Ecuaciones con isometrías ... 104
7. Teorema de reducción de isometrías ... 105
8. Identificación de isometrías dadas dos ternas correspondientes ... 106
9. Ejercicios ... 108
... 110

Capítulo 9 . LUGARES GEOMETRICOS FUNDAMENTALES

1. Introducción
1.1 Teoremas directo y recíproco ... 112
1.2 Limitación ... 112
1.3 Figura auxiliar de análisis ... 112
1.4 Metodología ... 113
2 Mediatriz de un segmento ... 113
2.1 Ejercicios teóricos ... 113
2.2 Ejemplo ... 114
3 Bisectriz de un ángulo ... 114
3.1 Proyección de un punto sobre una recta ... 115
3.2 Distancia entre un punto y una recta ... 115
3.3 La bisectriz como lugar geométrico ... 115
3.4 Ejercicio teórico ... 115
3.5 Unión de bisectrices ... 116
3.6 Ejemplo ... 116
4 Unión de paralelas ... 117
5 Paralela media entre paralelas ... 118
5.1 Ejemplo ... 119
6 Circunferencia ... 120
6.1 Ejemplo ... 121
7 Lugar geométrico de Thales ... 121
7.1 Ejemplo ... 123
8 Arco capaz ... 123
8.1 Teorema previo sobre ángulos inscritos ... 124
8.2 Ejercicios teóricos ... 124
8.3 El arco capaz como lugar geométrico ... 125
8.4 Unión de arcos ... 125
8.5 Ejemplo ... 126
9 Ejercicios ... 126
... 127

Capítulo 10 . TEOREMA DE THALES Y APLICACIONES

1. Proyección paralela 130
   1.1 Definición 130
   1.2 Propiedad 130
   1.3 Propiedad 131
2. Proporciones 131
3. Teorema de Thales 131
   3.1 Teorema recíproco de Thales 133
   3.2 Ejemplo 134
4. Aplicación de Thales a triángulos 134
5. Ejemplo 135
6. Existencia y unicidad de puntos de una recta, determinados por su razón de distancias a dos de ellos 136
7. Cuaterna armónica 137
   7.1 Ejemplo 137
8. Teorema de las bisectrices 138
   8.1 Bisectriz interior 138
   8.2 Bisectriz exterior 138
   8.3 Ejemplo 139
9. Circunferencia de Apolonio 140
   9.1 Construcción de la circunferencia 141
   9.2 Ejemplo 141
10. Ejercicios 142

Capítulo 11 . HOMOTECIA

1. Definición 144
2. Imágenes de rectas y segmentos 144
   2.1 Imágenes de rectas que contienen al centro 144
   2.2 Imágenes de rectas que no contienen al centro 145
   2.3 Segmentos homotéticos 145
   2.4 Ejercicios teóricos 145
   2.5 Ejemplo 146
3. Circunferencias homotéticas 146
   3.1 Imagen de una circunferencia 146
   3.2 Ejemplo 147
   3.3 Homotecias que transforman circunferencias 147
   3.4 Ejemplo 148
4. Estructura de grupo 148
   4.1 Ejercicios teóricos 149
   4.2 Ejemplo 149
   4.3 Ejemplo 150
5. Ejercicios 151

Capítulo 12 . SEMEJANZA

1. Definición........ 153
2. La semejanza como composición........ 153
3. Estructura de grupo........ 153
4. Criterios de semejanza de triángulos........ 154
   4.1 Primer criterio de semejanza de triángulos........ 155
   4.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos........ 155
   4.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos........ 156
   4.4 Ejercicios teóricos........ 156
   4.5 Ejemplo........ 156
   4.6 Ejemplo........ 157
5 Semejanzas directas e indirectas........ 157
   5.1 Ejemplo........ 158
6 Centro de semejanza........ 158
   6.1 Unicidad........ 159
   6.2 Existencia y determinación del centro de semejanza directa........ 159
   6.3 Ejemplo........ 159
   6.4 Existencia y determinación del centro de semejanza indirecta........ 160
   6.5 Ejemplo........ 162
7 Relaciones métricas en triángulos........ 163
   7.1 Teorema del cateto........ 164
   7.2 Ejercicios teóricos........ 164
   7.3 Teorema de la altura........ 165
   7.4 Teorema de Pitágoras........ 165
   7.5 Generalización a triángulos no rectángulos........ 165
   7.6 Teorema de la mediana........ 166
   7.7 Ejemplo........ 166
8. Relaciones métricas en circunferencias........ 167
   8.1 Potencia de un punto respecto de una circunferencia 167
   8.2 Ejercicios teóricos........ 167
   8.3 Lugar geométrico referido a diferencia de cuadrados constante a dos puntos........ 168
   8.4 Eje radical........ 168
   8.5 Ejercicios teóricos........ 169
   8.6 Centro radical........ 170
   8.7 Construcción del eje radical de dos circunferencias interiores o exteriores........ 170
   8.8 Ejemplo........ 171
   8.9 Segmento o sección áurea........ 171
9. Ejercicios........ 171

GEOMETRIA DEL ESPACIO

Capítulo 13 . INCIDENCIAS Y ORDEN EN EL ESPACIO

1. Introducción..176
2. Axioma de determinación del plano..176
3. Axioma de inclusión de una recta en un plano..176
4. Axioma de partición del espacio..176
5. Recíproco del axioma..177
6. Ejercicio teórico..177
7. Teorema de Pasch en el espacio..177
8. Determinación de planos..178
   8.1 Plano determinado por una recta y un punto exterior..178
   8.2 Plano determinado por dos rectas secantes..178
   8.3 Plano determinado por dos rectas paralelas..178
9. Existencia de rectas no coplanarias..179
10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio..179
11. Intersección de planos..180
   11.1 Intersección determinada por dos puntos comunes..180
   11.2 Intersección determinada por un punto en común..180
   11.3 Métodos prácticos para hallar la intersección entre dos planos..181
   11.4 Ejemplo..182
   11.5 Puntos alineados..182
   11.6 Ejemplo..182
12 Intersección entre rectas y planos..183
   12.1 Ejemplo..184
   12.2 Ejemplo..184
13 Diedro..184
   13.1 Semiespacio cerrado..185
   13.1 Diedro convexo..185
14 Triedro convexo..185
15 Sentido en el espacio..185
16 Ángulo poliedro convexo..186
17 Poliedros convexos..186
   17.1 Poliedros convexos particulares..186
18 Desarrollo de la superficie de un poliedro..187
   18.1 Ejemplo..187
19 Teorema de Euler..188
20 Unicidad de los cinco poliedros regulares convexos..189
21 Esfera y cáscara esférica..191
22 Sección plana..191
23 Ejemplo..192
24 Ejercicios..193

Capítulo 14 . PARALELISMO EN EL ESPACIO

1. Paralelismo entre rectas y planos..195
   1.1 Definición..195

1.2 Condición necesaria y suficiente de paralelismo entre planos............... 195
1.3 Ejercicio teórico...196
1.4 Paralela a una recta por un punto de un plano paralelo........................196
1.5 Recta paralela a dos planos secantes..197
1.6 Existencia y unicidad del plano paralelo dos rectas que se cruzan......... 197
1.7 Ejemplo...198
2 Paralelismo entre planos..199
2.1 Definición...199
2.2 Ejercicio teórico...199
2.3 Condición necesaria y suficiente de paralelismo entre planos................ 200
2.4 Ejemplo...200
2.5 Existencia y unicidad del plano paralelo a otro por un punto................. 200
2.6 Ejercicio teórico...201
2.7 Ejemplo...201
2.8 Ejercicio teórico...201
2.9 Lugar geométrico de las rectas paralelas a un plano por un punto...........202
3. El paralelismo en el espacio como relación de equivalencia.......................202
3.1 Paralelismo entre rectas..202
3.2 Paralelismo entre planos...203
4. Ejercicios...204

Capítulo 15 . PERPENDICULARIDAD
1. Perpendicularidad entre rectas y planos...205
2. Condición necesaria y suficiente de perpendicularidad entre recta y plano....205
3. Plano perpendicular a una recta por un punto.......................................207
4. Plano mediatriz...207
4.1 El plano mediatriz como lugar geométrico..208
4.2 Ejemplo...208
5. Rectas ortogonales..209
6. Recta ortogonal con otra, incluida en un plano perpendicular.................. 209
7. Ejercicio teórico...209
8. Ejemplo..210
9. Recta perpendicular a un plano por un punto..210
10. Teorema de las tres perpendiculares...211
11. Ejemplo...211
12. Ejercicios teóricos...212
13. Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos de una circunferencia 212
13.1 Ejemplo...213
14. Planos perpendiculares..213
15. Carácter recíproco de la perpendicularidad entre planos........................214
16. Ejemplo...214
17. Recta incluida en un plano perpendicular a otro...................................214
18. Plano perpendicular a la intersección de dos planos..............................215
18.1 Ejercicio teórico..215

19. Plano perpendicular a otro que contiene una recta........ 215
20. Ejemplo........ 216
21. Ejercicios........ 217

Capítulo 16 . PROYECCIONES, DISTANCIAS Y ANGULOS

1. Proyecciones........ 218
   1.1 Proyección de un punto........ 218
   1.2 Proyección de una recta........ 219
   1.3 Ejercicios teóricos........ 219
   1.4 Proyecciones de rectas paralelas........ 219
   1.5 Proyecciones de rectas ortogonales........ 220
2. Distancias........ 220
   2.1 Distancia de un punto a un plano........ 220
   2.2 Distancia de un punto a un plano como medida mínima........ 220
   2.3 Distancia entre una recta y un plano paralelo........ 221
   2.4 Distancia entre planos paralelos 221
   2.5 Ejemplo 221
   2.6 Ejercicio teórico........ 222
   2.7 Perpendicular común entre dos rectas que se cruzan........ 222
   2.8 Distancia entre dos rectas cruzadas........ 223
   2.9 Distancia entre dos rectas cruzadas como medida mínima........ 223
   2.10 Ejemplo........ 223
3. Ángulos........ 224
   3.1 Ángulo entre recta y plano........ 224
   3.2 Ángulo entre recta y plano como ángulo mínimo........ 225
   3.3 Sección recta o rectilíneo de un diedro........ 225
   3.4 Ángulo entre dos planos secantes........ 226
   3.5 Ángulo entre dos rectas cruzadas........ 227
   3.6 Ejemplo........ 222
4. Áreas y volúmenes........ 228
   4.1 Ejemplo........ 229
5. Ejercicios........ 231

Capítulo 17 . ISOMETRIAS EN EL ESPACIO

1. Definición de isometría en el espacio........ 233
2. Imágenes de planos........ 234
3. Conservación de la perpendicularidad entre rectas........ 234
4. Ejercicio teórico........ 234
5. Axioma de determinación de isometrías en el espacio........ 234
6. Plano unido........ 235
7. Conservación de la perpendicularidad entre rectas y planos........ 235
8. Diedros y rectilíneos congruentes........ 236
9. Semiplano bisector........ 237
   9.1 Definición........ 237
   9.2 El semiplano bisector como lugar geométrico........ 237
10. Isometría identidad en el espacio........ 238

10.1 Definición..
10.2 Propiedad..238
11. Simetría especular..238
11.1 Definición...239
11.2 Ejercicio teórico..239
11.3 El plano de simetría como plano mediatriz......................................239
11.4 Ejercicio teórico..240
11.5 Planos dobles..240
11.6 Ejemplo...240
12 Simetría axial en el espacio..241
12.1 Definición...241
12.2 Ejercicio teórico..241
12.3 Planos que contienen al eje de simetría..241
12.4 Rectas perpendiculares al eje de simetría..242
12.5 Planos perpendiculares al eje..242
12.6 Imagen de rectas ortogonales al eje...242
12.7 Ejemplo...243
13 Simetría central en el espacio...243
13.1 Definición...244
13.2 Ejercicios teóricos...244
13.3 Rectas que contienen al centro de simetría..244
13.4 Ejercicios teóricos...245
13.5 Planos que no contienen al centro...245
13.6 Ejemplo...245
14 Traslación en el espacio...246
14.1 Definición...247
14.2 Imagen de un punto...247
14.3 Ejemplo...248
14.4 Ejercicio teórico..248
14.5 Imágenes de planos...249
14.6 Ejercicio teórico..249
14.7 Planos correspondientes..249
14.8 Ejemplo...249
15 Rotación en el espacio..250
15.1 Definición...251
15.2 Eje de giro...251
15.3 Planos perpendiculares al eje..251
15.4 Ejemplo...252
15.5 Determinación de eje y ángulo de giro...252
15.6 Ejemplo...253
16 Ejercicios..254
SOLUCIONES..254
INDICE GENERAL...256
BIBLIOGRAFIA..272
....284

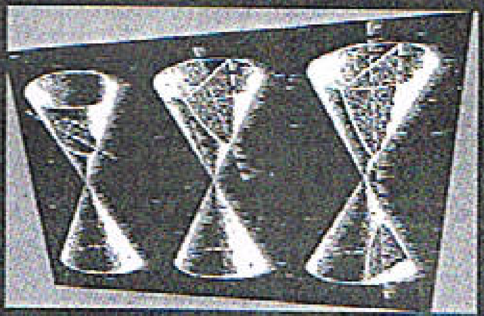
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- CURSO DE GEOMETRIA METRICA...................... P. Puig Adam
- ELEMENTOS DE GEOMETRIA ....Francesco Severi
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA .... Eduardo Coppetti
- COMO RESOLVER PROBLEMAS...........................Petracca - Bonifacino - Peralta
  DE GEOMETRIA METRICA
- APUNTES PARA UN CURSO DE.............................Rodolfo Louro
  GEOMETRIA EUCLIDIANA EN
  EL INSTITUTO DE PROFESORES
  ARTIGAS (I. P.A.)
- GEOMETRIA EUCLIDIANA....................................Etda Rodriguez
  (DIRECCION DE FORMACION Y
  PERFECCIONAMIENTO DOCENTE)
- LUGARES GEOMETRICOS - METODO................. H. Deambrosi - R. Scavone
  DE LOS LUGARES - APLICACIONES
  (INSPECCION DOCENTE DE
  MATEMATICA)
- GEOMETRIA ....Zambra - Rodriguez - Belcredi
- EJERCICIOS DE GEOMETRIA................................Da Rosa - Otero
- ALGEBRA MODERNA ....Lentin - Rivaud

Otras obras del autor

W. FERNÁNDEZ VAL
J. CORRADINO CASTRO

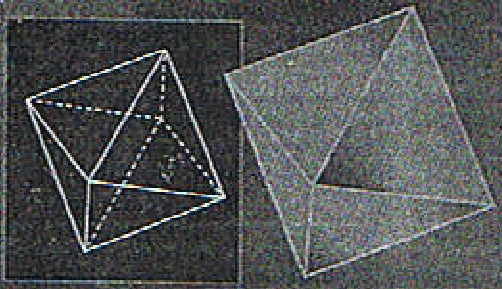
GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ÁLGEBRA



Autorizado por el Consejo de Educación Secundaria

KAPELUSZ - URUGUAY

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA



Walter Fernández Val

Autorizado por el Consejo de Educación Secundaria

KAPELUSZ - URUGUAY

9789974392229